

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1910.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

§ 1. — Risoluzione d'una equazione integrale di 2° grado.

1. Poniamo, facendo uso di una notazione adottata in precedenti lavori,

$$M_1 f = m_1 f(y) + \int_0^y f(x) \mu_1(x, y) dx$$

$$M_2 f = m_2 f(y) + \int_0^y f(x) \mu_2(x, y) dx$$

e supponiamo che le due funzioni finite e continue μ_1 e μ_2 siano permutabili ⁽¹⁾, cioè si abbia,

$$\int_x^y \mu_1(x, \xi) \mu_2(\xi, y) d\xi = \int_x^y \mu_2(x, \xi) \mu_1(\xi, y) d\xi.$$

Poniamo poi

$$X_1 f = x_1 f(y) + \int_0^y f(x) \xi_1(x, y) dx$$

$$X_2 f = x_2 f(y) + \int_0^y f(x) \xi_2(x, y) dx,$$

⁽¹⁾ Vedi la mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 20 febbraio 1910.

e cerchiamo di determinare i parametri x_1, x_2 e le funzioni ξ_1 e ξ_2 in modo tale che

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) f = \mathbf{M}_1 f,$$

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 f = \mathbf{M}_2 f.$$

2. Dovremo avere

$$x_1 + x_2 = m_1, \quad x_1 x_2 = m_2$$

$$\xi_1(x, y) + \xi_2(x, y) = \mu_1(x, y)$$

$$x_1 \xi_2(x, y) + x_2 \xi_1(x, y) + \xi_1 \xi_2(x, y) = \mu_2(x, y);$$

quindi x_1 e x_2 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0,$$

mentre ξ_1 e ξ_2 soddisfaranno alle equazioni integrali di 2° grado

$$\int_{\alpha}^y \xi_i(x, \zeta) \xi_i(\zeta, y) d\zeta - \int_{\alpha}^y \xi_i(x, \zeta) \mu_i(\zeta, y) d\zeta \\ + (x_i - x_s) \xi_i(x, y) = -\mu_2(x, y) + x_i \mu_1(x, y)$$

ove i ed s rappresentano i numeri 1 e 2, oppure 2 e 1 rispettivamente.

Supponiamo le radici x_1 e x_2 diverse fra loro: allora, applicando la regola data nella Nota precedentemente citata, avremo che $\xi_1(x, y)$, $\xi_2(x, y)$ si otterranno prendendo successivamente il segno $+$ e il segno $-$ nella formula

$$\frac{1}{2} \mu_1(x, y) \pm \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \left(\frac{2m_1 \mu_1 + \mu_1^2 - 4\mu_2}{m_1^2 - 4m_2} \right)^n.$$

Le potenze e i prodotti delle μ_1 e μ_2 nella serie suddetta debbono considerarsi come operazioni di composizione. In virtù della teoria generale, avremo che la serie stessa sarà sempre uniformemente convergente.

§ 2. — Risoluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

3. Abbiassi l'equazione integro-differenziale

$$(1) \quad z^2 \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} + z \mathbf{M}_1 \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{M}_2 f(y, z) = \varphi(y, z)$$

in cui $\varphi(y, z)$ è una funzione finita e continua.

Essa potrà ancora scriversi

$$z \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y, z) \right] + \mathbf{X}_2 \left[z \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y, z) \right] = \varphi(y, z);$$

e perciò, applicando i risultati ottenuti in una Nota precedente (¹), ne otterremo la soluzione finita e continua, calcolando dapprima:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Psi(x, z) = & \frac{1}{z^{x_1}} \int_0^z \xi^{x_1-1} \left[\varphi(x, \xi) + \int_0^x \varphi(\xi, \zeta) V_1 \left(\log \frac{\xi}{z} \mid \xi, x \right) d\xi \right] d\zeta \\ & - \frac{1}{z^{x_2}} \int_0^z \xi^{x_2-1} \left[\varphi(x, \xi) + \int_0^x \varphi(\xi, \zeta) V_2 \left(\log \frac{\xi}{z} \mid \xi, x \right) d\xi \right] d\zeta, \end{aligned}$$

quindi costruendo:

$$(3) \quad f(y, z) = (X_2 - X_1)^{-1} \Psi(y, z),$$

in cui si intende che

$$V_1(z \mid x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \xi_1^n(x, y)$$

$$V_2(z \mid x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \xi_2^n(x, y),$$

mentre le potenze di ξ_1 e ξ_2 denotano risultati di operazioni di composizione.

§ 3. — Sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

4. Facciamo uso delle notazioni introdotte nella Nota: *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* (²) e poniamo (³)

$$(4) \quad \begin{cases} U = xt_{11} + yt_{12} + zt_{13} \\ V = xt_{21} + yt_{22} + zt_{23} \\ W = xt_{31} + yt_{32} + zt_{33} \end{cases} \quad \Theta = 2(A_1 - A_2) \theta.$$

Nella ipotesi che non esistano forze di massa, avremo

$$\begin{aligned} \Delta^2 t_{11} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} & \Delta^2 t_{23} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} \\ \Delta^2 t_{22} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} & \Delta^2 t_{31} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} \\ \Delta^2 t_{33} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} & \Delta^2 t_{12} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} \\ \Delta^2 \Theta &= 0; \end{aligned}$$

(¹) Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 6 febbraio 1910.

(²) Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 19 dicembre 1909.

(³) Cfr. Almansi, Memorie della R. Acc. di Torino, 1897.

quindi

$$\Delta^2 U = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta \right)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta \right)$$

$$\Delta^2 W = \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta \right)$$

e per conseguenza

$$(5) \quad \begin{cases} U = U_1 + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial x}, \\ V = V_1 + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial y}, \\ W = W_1 + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

ove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante e U_1, V_1, W_1, f sono funzioni armoniche, mentre

$$(6) \quad r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} f = \frac{1}{4} \left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta \right) = \frac{1}{4} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \Theta \right).$$

5. Se l'origine è nel centro della sfera elastica di raggio R , le funzioni U_1, V_1, W_1 saranno determinate quando si conoscano le tensioni che sollecitano la sfera al contorno. Tenendo poi conto che dalle (5) e (4) e delle relazioni che legano le tensioni alle deformazioni, si ha

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \\ &= t_{11} + t_{22} + t_{33} = (3A_2 - 4A_1) \Theta = \frac{1}{2} (A_1 - A_2)^{-1} (3A_2 - 4A_1) \Theta, \end{aligned}$$

colla eliminazione di Θ fra questa ultima relazione e la (6) risulterà che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$(8) \quad r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - A_3 \left(r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} f \right) = \frac{1}{2} \left(\Theta_1 - r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right)$$

in cui

$$\Theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$A_3 = (A_1 - A_2)^{-1} (3A_2 - 4A_1).$$

L'equazione integro-differenziale (8) rientra nel caso contemplato nel paragrafo precedente, quindi si potrà calcolare f , ottenuta la quale si avranno U, V, W .

Ciò fatto si troverà θ dalla relazione (vedi form. 7))

$$\theta = (3A_2 - 4A_1)^{-1} \left(\Theta_1 + 2r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

e poichè le (4) possono scriversi

$$x(A_2 - 2A_1)\theta + A_1(2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}) = U$$

$$y(A_2 - 2A_1)\theta + A_1(x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}) = V$$

$$z(A_2 - 2A_1)\theta + A_1(x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}) = W$$

potremo ricavare immediatamente i trinomi

$$2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}, \quad x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}, \quad x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}$$

dai quali, col metodo dato dal prof. Almansi ⁽¹⁾, si calcoleranno gli spostamenti allorchè si conoscerà lo spostamento e la rotazione della particella che giace al centro della sfera.

6. Nei problemi relativi alla terra, allorchè si vuol tener conto della sua elasticità, non vi ha dubbio che i fenomeni ereditarii debbono avere una influenza non trascurabile. L'analisi precedente offre il mezzo di calcolare in modo completo gli effetti della ereditarietà, qualunque sia la scelta che si faccia della legge di ereditarietà, purchè si supponga la *ereditarietà lineare*. Si noti che le operazioni a cui si deve ricorrere sono sviluppi in serie i cui termini sono ottenuti con operazioni di composizione e quindi sono in generale rapidamente convergenti, giacchè, nella operazione di composizione, ogni potenza ed ogni composizione di più funzioni, conduce ad una quantità il cui ordine di grandezza è affetto da un divisore eguale al fattoriale relativo all'esponente o al numero delle funzioni che si compongono.

Errata-Corrige di Memorie precedenti.

Vol. XVIII, serie 5^a, 2° sem. 1909, fasc. 9, Nota: *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, a pag. 299 ultima riga

$$\int_{t_0}^T \sum_{hk} \varphi_{hk/is}(\tau, t) \gamma'_{hk}(\tau) d\tau \quad \text{leggi} \quad \int_t^T \sum_{hk} \varphi_{hk/is}(\tau, t) \gamma'_{hk}(\tau) d\tau.$$

Vol. XIX, serie 5^a, 1° sem. 1910, fasc. 4, Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, a pag. 178, 3^a riga dell'Art. 19 (§ 8)

$$\frac{1}{n} \sum_h^n m_{ih}^{(p-i)} m_{hs}^i \quad \text{leggi} \quad \frac{1}{n} \sum_h^n m_{ih}^{(p-r)} m_{hs}^{(r)}.$$

A pag. 180, 2^a riga dell'Art. 20 (§ 3), dalle relazioni funzionali leggi dalle relazioni algebriche e funzionali.

(¹) Vedi Memoria citata precedentemente.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido.* Nota IV del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Ho esaminato, nelle Note precedenti, l'azione esercitata da una massa liquida in moto, sopra un corpo *fisso* S_0 . Io mi propongo ora di estendere questa ricerca al caso più generale che il corpo S_0 sia pure in movimento, supponendo sempre che la massa liquida occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ del corpo, ed un'altra superficie chiusa, immobile, σ' .

Nella espressione dell'azione A , che è definita dalla formula

$$(1) \quad A = \int_{\sigma} p \lambda \, d\sigma, \quad \left(\int_{\sigma} \lambda \, d\sigma = 0 \right)$$

per ciò che riguarda il movimento della massa liquida devono figurare soltanto le componenti di velocità u, v, w , relative a quell'istante a cui si riferisce il valore di A che vogliamo determinare. Potranno pur figurarvi (oltre alla densità ϱ) quantità che dipendano solo da λ , nonchè dalla posizione e dal movimento del corpo in quell'istante, e *negl'istanti successivi*: quantità che saranno considerate come note.

In particolare comparirà nell'espressione di A la funzione φ , armonica e regolare in S , che sopra σ e σ' soddisfa le condizioni $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

Noi introdurremo, inoltre, una funzione ψ , pure armonica e regolare in S , che nei punti di σ e σ' soddisfa la condizione

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = N = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

α, β, γ denotando al solito i coseni direttori della normale n che penetra in S .

Nei punti della superficie fissa σ' sarà $N = 0$. Nei punti di σ la N sarà nota, conoscendosi il movimento di S_0 , anche negl'istanti successivi a quello cui si riferisce A . La stessa funzione ψ sarà pertanto da ritenersi come nota (a meno di una costante addittiva) in quell'istante e nei successivi.

Essa rappresenta il potenziale di velocità relativo ad un movimento della massa liquida, compatibile col dato movimento di S_0 .

Porremo, riferiti i punti dello spazio ad un sistema $(x y z)$ di assi *fissi*:

$$(2) \quad u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$(3) \quad u_1 = u - u_0, \quad v_1 = v - v_0, \quad w_1 = w - w_0.$$

Sarà allora, in tutto lo spazio S,

$$(4) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

e nei punti di σ e σ' :

$$(5) \quad u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0.$$

Le funzioni u_0, v_0, w_0 sono continue. Invece le u, v, w , quindi anche le u_1, v_1, w_1 potranno avere delle discontinuità. Ma se $d\omega$ è un elemento di superficie sul quale il vettore (u_1, v_1, w_1) è discontinuo, le sue proiezioni, come quelle del vettore (u, v, w) , sopra una normale a $d\omega$, dovranno essere uguali.

2. Posto

$$f' = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} - (v\xi - w\eta), \text{ ecc.},$$

sarà, come nella Nota III,

$$A = e(B + C),$$

ove

$$B = \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS,$$

$$C = \int_s \left(f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS.$$

L'integrale C rappresenta una quantità nota. Quanto a B, poichè $u = u_0 + u_1$, ecc., ponendo

$$B_0 = \int_s \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS,$$

$$B_1 = \int_s \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS,$$

sarà:

$$B = B_0 + B_1.$$

L'integrale B_0 è pure noto. Ma noi possiamo dargli una forma più semplice, osservando che $\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$, ecc. Integrando per parti, e tenendo presenti le proprietà della funzione φ , avremo:

$$(6) \quad B_0 = - \int_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda d\sigma.$$

Per trasformare l'integrale B_1 introdurremo la funzione

$$(7) \quad Q_1 = u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Supporremo poi definita la funzione λ , e con essa la φ , anche negli istanti successivi al tempo t a cui si riferisce il valore di A . Onde sarà, posto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi':$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z}.$$

E perciò

$$B_1 = \int_s \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS - B'_1,$$

ove

$$B'_1 = \int_s \left(u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dS.$$

Con una integrazione per parti, e chiamando Σ l'insieme delle due superficie σ e σ' che limitano lo spazio S , avremo

$$B'_1 = - \int_s \varphi' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dS - \int_\Sigma \varphi' (u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma) d\Sigma,$$

trasformazione lecita, anche se esistono delle superficie ω su cui u_1, v_1, w_1 siano discontinue, per la continuità di φ' , e della componente, secondo le normali ad ω , del vettore (u_1, v_1, w_1) .

In virtù delle formole (4) e (5) sarà $B'_1 = 0$; e per conseguenza:

$$B_1 = \int_s \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS = \int_s \frac{dQ_1}{dt} dS - \int_s \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS.$$

Ma $\int_s \frac{dQ_1}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_s Q_1 dS$; e $\int_s Q_1 dS = 0$, come si riconosce eseguendo su questo integrale, dopo sostituita a Q_1 la sua espressione (7), una trasformazione analoga a quella eseguita sopra B'_1 . Dunque:

$$B_1 = - \int_s \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS.$$

Poichè $A = \varphi(B + C)$, e $B = B_0 + B_1$, ponendo $B' = C + B_1$, ossia

$$(8) \quad \begin{aligned} B' &= \int_s \left(f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS - \\ &\quad - \int_s \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS, \end{aligned}$$

sarà:

$$(9) \quad A = e(B_0 + B').$$

Abbiamo così un'espressione di A che soddisfa alle condizioni richieste.

Ma noi possiamo dare ad A un'espressione diversa, e tale, che nel caso in cui il corpo S_0 sia fisso, ci riconduca immediatamente ad una delle formule stabilite nelle Note precedenti.

Poniamo perciò

$$(10) \quad Q = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(11) \quad Q_0 = u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Sarà allora, per le formule (7) e (3), $Q_1 = Q - Q_0$; e per la (8):

$$B' = \int_s \left\{ \left(f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \right\} dS + \\ + \int_s \left(u_0 \frac{\partial Q_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial Q_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial Q_0}{\partial z} \right) dS.$$

Nel primo integrale la quantità sotto il segno è uguale a $-[Q]^2$, essendo, come nella Nota III

$$[Q]^2 = u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dots + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \dots$$

Il secondo integrale si riduce a $-\int_\sigma Q_0 N d\sigma$. Onde sarà

$$B' = -\int_s [Q]^2 dS - \int_\sigma Q_0 N d\sigma;$$

e per le formule (9) e (6):

$$(12) \quad A = -e \int_s [Q]^2 dS - e \int_\sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda + Q_0 N \right) d\sigma.$$

Quando il corpo S_0 è fisso, sarà $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, $N = 0$; si ritrova così la formula

$$A = -e \int_s [Q]^2 dS$$

della Nota III.

Il termine

$$-e \int_\sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda + Q_0 N \right) d\sigma$$

che compare allorchè il corpo si muove, è indipendente dal movimento della massa liquida: esso dipende solo (oltre che da ϱ e da λ) dalla posizione e dal movimento di S_0 . La presenza della derivata di ψ rispetto al tempo mostra però che questo termine non dipende soltanto dal movimento (traslazione e rotazione) del corpo S_0 al tempo t .

3. Noi vogliamo porre sotto un'altra forma l'integrale

$$B_0 = - \int_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda \, d\sigma,$$

che figura nella formula (12).

A tale scopo definiremo la funzione λ , anche negl'istanti successivi a t , supponendo che per *qualunque* posizione del corpo S_0 nell'interno di σ' , si abbia

$$\lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma,$$

ove X, Y, Z rappresentano tre funzioni delle variabili x, y, z , regolari in tutto lo spazio racchiuso da σ' , che soddisfano all'equazione:

$$(13) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Se A rappresenta la componente, secondo uno degli assi coordinati, della forza o della coppia che agisce sul corpo, sarà:

$$\lambda = -\alpha, \text{ quindi } X = -1, Y = 0, Z = 0, \text{ ecc.};$$

oppure

$$\lambda = -\gamma y + \beta z, \text{ quindi } X = 0, Y = z, Z = -y, \text{ ecc.}$$

Dunque λ è sempre espressa nel modo indicato.

Avremo pertanto:

$$B_0 = - \int_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\sigma;$$

od anche, Σ denotando, come nel § 2, l'insieme delle superficie σ e σ' :

$$B_0 = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\Sigma + \int_{\sigma'} \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\sigma'.$$

Dei due integrali che costituiscono il secondo membro dell'equazione, il primo possiamo trasformarlo in un integrale esteso ad S . Il secondo, poichè σ' è una superficie fissa, ed $X\alpha + Y\beta + Z\gamma$ conserva, in ogni suo punto, un valore costante, può mettersi sotto la forma di una derivata esatta

rispetto al tempo. Tenendo presente, nel trasformare il primo integrale, la equazione (14), avremo:

$$B_0 = \int_s \left\{ X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} \right\} dS + \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) d\sigma'.$$

Ora, non dipendendo X, Y, Z dal tempo, posto

$$(14) \quad \theta = X \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y \frac{\partial \psi}{\partial y} + Z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

sarà

$$X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dt} - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right);$$

e per conseguenza, osservando che

$$\begin{aligned} \int_s \frac{d\theta}{dt} dS &= \frac{d}{dt} \int_s \theta dS, \\ \int_s \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dS &= - \int_{\Sigma} \theta N d\Sigma = - \int_{\sigma} \theta N d\sigma, \\ B_0 &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_s \theta dS + \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) d\sigma' \right\} + \int_{\sigma} \theta N d\sigma. \end{aligned}$$

Ma per le formule (14) e (13):

$$\int_s \theta dS = - \int_{\Sigma} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) d\Sigma.$$

Quindi:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) d\sigma + \int_{\sigma} \theta N d\sigma,$$

ossia:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \psi \lambda d\sigma + \int_{\sigma} \theta N d\sigma:$$

formula che presenta la proprietà (utile nell'applicazione a casi particolari) di non contenere derivate rispetto al tempo sotto i segni d'integrazione.

4. Riprendiamo la formula (12) che scriveremo, sostituendo a

$$- \int_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda d\sigma,$$

ossia a B_0 , l'espressione trovata:

$$A = - e \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \psi \lambda d\sigma + e \int_{\sigma} (\theta - Q_0) N d\sigma - e \int_s [Q]^2 dS,$$

o più semplicemente:

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + A_1,$$

essendo:

$$\Phi = -e \int_s \psi \lambda d\sigma,$$

$$A_1 = e \left\{ - \int_s [Q]^2 dS + \int_s (\theta - Q_0) N d\sigma \right\}.$$

Poniamo $R = \theta - Q_0$. Sarà:

$$(15) \quad A_1 = e \left\{ - \int_s [Q]^2 dS + \int_s R N d\sigma \right\};$$

e per le formule (14), (11) e (2):

$$R = \left(X - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Il termine A_1 dipende dal movimento della massa liquida; e per movimenti *simili* è proporzionale al quadrato della velocità in un punto. Se infatti moltiplichiamo u, v, w per una costante c , $[Q]^2$ risulta moltiplicato per c^2 ; N , quindi anche la funzione ψ , ed R , per c ; dunque RN per c^2 .

L'altro termine che figura in A è la derivata, rispetto al tempo, di una quantità Φ indipendente dal movimento della massa liquida.

Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare.* Nota del Corresp. G. LAURICELLA.

Quando si voglia risolvere il problema di Dirichlet mediante uno strato semplice, distribuito sul contorno del campo che si considera, una prima quistione, che si presenta, è di vedere se esistono o no strati semplici aventi valori nulli nei punti del contorno stesso; ovvero, riferendosi all'equazione integrale di 1^a specie, a cui il problema dà luogo, di vedere se il nucleo (Kern) corrispondente è non chiuso o chiuso. Per i campi a *tre* dimensioni è noto che il nucleo è sempre chiuso, ossia che lo strato semplice, avente valori nulli nei punti del contorno, ha la densità uguale allo zero. Non accade lo stesso per il caso delle aree piane. Il Picard in una recente pubblicazione (¹), limitandosi al caso di un contorno circolare, ha notato che per la circonferenza di raggio 1 il nucleo è non chiuso, mentre per qualunque altra circonferenza il nucleo è sempre chiuso. Nella presenta Nota

(¹) *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIX, anno 1910, pp. 77-97.

dimostro l'esistenza di infinite linee piane chiuse (che chiamo *speciali*), per le quali il nucleo è non chiuso, ossia per ognuna delle quali esiste uno strato semplice logaritmico avente valori nulli, lungo la linea stessa. Allora si presenta subito la seguente quistione: data una linea piana chiusa, sarà essa speciale o no? Qui do delle condizioni sufficienti perchè una linea non sia speciale, e delle condizioni necessarie (in generale non sufficienti) perchè una linea sia speciale; e dimostro ancora alcune proprietà delle linee speciali e non speciali, le quali possono contribuire a risolvere ogni volta la quistione proposta.

Del problema di Dirichlet mediante uno strato semplice e di altri problemi, che ad esso si ricollegano, mi occuperò in una prossima comunicazione.

1. Sia C una linea piana chiusa, la quale non si intersechi in alcun suo punto e per la quale siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1°) abbia una tangente determinata in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°) esista un numero fisso positivo a tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle normali n, n' in due punti qualsiasi s, s' di C , rivolte verso l'area piana finita limitata da C , e con r' il vettore $\overline{ss'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < ar'.$$

Riferiamo i punti del piano C a due assi cartesiani ortogonali x, y ; ed indichiamo con s l'arco della curva C , contato a partire da un suo punto arbitrario; con σ l'area piana finita racchiusa da C ; con σ' l'area piana infinita limitata pure da C ; e con r il vettore che congiunge il punto generico (ξ, η) del piano con un punto qualsiasi $s \equiv (x, y)$ di C . Quando il punto (ξ, η) è nell'interno dell'area σ , sarà indicato con P ; quando è nell'interno dell'area σ' , sarà indicato con P' ; quando si trova su C , sarà indicato con la corrispondente lunghezza s' dell'arco di curva C . In questo ultimo caso il corrispondente vettore r , conformemente a quanto fu fatto sopra, sarà indicato con r' .

Osserviamo che, se si pone:

$$\alpha(s, s') = \frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn},$$

sarà

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn'} = \alpha(s', s);$$

e la funzione $\alpha(s, s')$ sarà sempre finita e, tranne al più per $s = s'$, continua.

Ciò premesso, indichiamo con $v(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C , e consideriamo lo strato semplice:

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(s) \log r \, ds.$$

Posto:

$$\frac{\overline{dV}}{dn'} = \lim_{P=s'} \frac{dV}{dn'}, \quad \frac{\overline{dV}}{dn'} = \lim_{P'=s} \frac{dV}{dn'},$$

si ha, come è noto⁽¹⁾,

$$(1) \quad \frac{\overline{dV}}{dn'} = \frac{1}{2} v(s') + \int_C v(s) \cdot \alpha(s', s) ds,$$

$$(2) \quad \frac{\overline{dV}}{dn'} = -\frac{1}{2} v(s') + \int_C v(s') \cdot \alpha(s', s) ds \quad (2).$$

Teoremi sulle funzioni armoniche.

2. Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano finito σ limitato da una o più linee, il cui complesso indicheremo con C , se essa è finita e continua in tutto il campo σ (i punti di C inclusi), se ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo σ (i punti di C , al più, esclusi), se esiste ed è finita e continua lungo C l'espressione $\frac{dA}{dn}$, e se nei punti dell'interno di σ soddisfa all'equazione di Laplace.

Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano infinito σ' limitato da C , se essa, oltre alle condizioni analoghe a quelle poste per la precedente $A(\xi, \eta)$, soddisfa all'altra di annullarsi all'infinito come $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\rho^2}$.

Come è noto, valgono per la $A(\xi, \eta)$ le seguenti formole:

$$(3) \quad \int_{\sigma} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma + \int_C A \frac{dA}{dn} ds = 0,$$

$$(4) \quad \int_C \frac{dA}{dn} ds = 0,$$

$$(3)' \quad \int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' - \int_C A \frac{dA}{dn} ds = 0,$$

$$(4)' \quad \int_C \frac{dA}{dn} ds = 0.$$

⁽¹⁾ Vedi ad es. per le tre dimensioni Lauricella: *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica*, Nuovo Cimento. ser. V, vol. XIII, 1907, pp. 1-81.

⁽²⁾ Le formole (1), (2) sono state dimostrate, ponendo condizioni meno restrittive sia per la linea C , che per la funzione $v(s)$ [Vedi G. Pucciano, *Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare semplice e doppio, e delle loro derivate prime*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIII, anno 1907, pp. 374-393].

Rammentiamo ancora che se $B(\xi, \eta)$ è una funzione finita e continua in tutto il campo σ' , la quale ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo σ' , esclusi al più i punti di C , nei punti dell'interno di σ' soddisfa all'equazione di Laplace, e per ϱ abbastanza grande si comporta come $\log \varrho$, mentre le sue derivate prime si comportano come $\frac{1}{\varrho}$; ed inoltre è tale che l'espressione $\frac{\overline{dB}}{dn}$ esiste ed è finita e continua lungo C , sussiste la formola:

$$(5) \quad \int_C \left(B \frac{\overline{dA}}{dn} - A \frac{\overline{dB}}{dn} \right) ds = 0.$$

3. Se la funzione armonica $A(\xi, \eta)$ del campo σ' ha valore costante lungo C , essa deve essere identicamente nulla in tutto il campo σ' .

Infatti dalla (3)' si ha, indicando con H il valore costante di $A(\xi, \eta)$ su C ,

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' - H \int_C \frac{\overline{dA}}{dn} ds = 0;$$

e perciò, in virtù della (4)',

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' = 0.$$

Di qui, tenuto conto che la $A(\xi, \eta)$ si annulla all'infinito, risulta la proposizione enunciata.

Strato a valore costante lungo C .

4. Si considerino le due seguenti equazioni integrali omogenee:

$$(6) \quad 0 = w_1(s') + 2 \int_C w_1(s) \cdot \alpha(s, s') ds,$$

$$(7) \quad 0 = v_1(s') + 2 \int_C v_1(s) \cdot \alpha(s', s) ds.$$

La (6), come è notorio, ammette la soluzione $w_1(s) = \text{costante}$; quindi la (7) ammetterà una soluzione almeno $v_1(s)$, la quale, IN VIRTÙ DELLA PROPRIETÀ DELLA $\alpha(s', s)$, sarà finita e continua in tutto il campo C .

5. Ciò premesso, sia $v_1(s)$ una soluzione qualsiasi dell'equazione (7), e si formi con questa soluzione lo strato semplice:

$$(8) \quad V_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v_1(s) \cdot \log r \cdot ds.$$

Dalle (1), (7) risulta:

$$\frac{d\overline{V_1}}{dn} = 0;$$

quindi lo strato V_1 nei punti di C ha un valore costante.

Dalle (2), (7) si ha poi:

$$(9) \quad \frac{d\overline{V_1}}{dv} = -v_1(s).$$

Rammentiamo che per q abbastanza grande si ha per uno strato qualsiasi $V_1(\xi, \eta)$:

$$(10) \quad V_1(\xi, \eta) = \log q \int_C v_1(s) ds + \frac{1}{q} M(\xi, \eta),$$

$$(11) \quad \frac{dV_1}{dq} = \frac{1}{q} \int_C v_1(s) ds + \frac{1}{q^2} N(\xi, \eta),$$

dove le funzioni $M(\xi, \eta)$, $N(\xi, \eta)$ e le loro derivate prime sono finite, continue ed inferiori in valore assoluto ad una quantità, che si può fissare.

Di qui segue che per una soluzione qualsiasi $v_1(s)$ dell'equazione integrale (7) si deve avere:

$$\int_C v_1(s) ds \neq 0.$$

Infatti nel caso contrario la $V_1(\xi, \eta)$ sarebbe una funzione armonica nel campo σ' ; e quindi, in virtù del teorema al § 3, dovrebbe essere identicamente nulla in questo campo. Allora si avrebbe:

$$\frac{d\overline{V_1}}{dn} = -v_1(s) = 0$$

lungo la linea C , contro l'ipotesi.

6. Siano $v_1(s)$, $v_2(s)$ due soluzioni qualsiasi dell'equazione integrale (7). In virtù della proposizione testè dimostrata, si dovrà avere:

$$M_1 = \int_C v_1(s) ds \neq 0, \quad M_2 = \int_C v_2(s) ds \neq 0.$$

Ora si determini una costante b in modo che sia:

$$M_2 - bM_1 = 0;$$

e si consideri la funzione:

$$v_3(s) = v_2(s) - bv_1(s).$$

Essa sarà una soluzione dell'equazione integrale (7); e poichè:

$$\int_C v_3(s) ds = \int_C \{v_2(s) - bv_1(s)\} ds = 0,$$

così dovrà aversi lungo C:

$$v_3(s) = 0,$$

ossia:

$$v_2(s) = bv_1(s).$$

Di qui segue, come complemento al risultato stabilito nel § 4, che l'equazione integrale (7) ammette una sola soluzione, determinata a meno di un coefficiente costante ⁽¹⁾.

7. Per fissare le idee, si determini $v_1(s)$ in modo che sia:

$$\int_C v_1(s) ds > 0.$$

Tenendo conto della (10) si ha che la corrispondente funzione $V_1(\xi, \eta)$ prende il suo minimo valore (costante) su C; quindi sarà in un punto generico di C:

$$\frac{d\overline{V}_1}{dn} \leq 0;$$

e in virtù della (9) si avrà lungo C:

$$(12) \quad v_1(s) \geq 0.$$

Di qui risulta, avuto riguardo alla forma (8) dello strato $V_1(\xi, \eta)$, che se la curva C è tale che esiste un punto nell'area σ , per il quale $\log r$ non muta mai di segno e non si annulla in tutti i punti nei quali la $v_1(s)$ è diversa da zero, il valore costante di $V_1(\xi, \eta)$ nei punti di C sarà certamente diverso da zero; ed in particolare sarà negativo per tutte le linee C, le quali possono essere contenute in un cerchio di raggio 1, sarà positivo per tutte le linee C, le quali possono abbracciare un cerchio di raggio 1.

Si ha ancora che condizione necessaria (in generale non sufficiente) affinchè lo strato $V_1(\xi, \eta)$ sia uguale allo zero nei punti di C è che la linea C sia intersecata da qualunque circonferenza di raggio 1 col centro nell'area σ .

⁽¹⁾ La prima dimostrazione che io detti di questa proposizione nella mia Nota: Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, t. XV, ser. 5^a, anno 1906, pp. 611-619, dipende dal teorema di Liapounoff sulla continuità delle derivate normali di doppio strato, e richiede condizioni più restrittive sulla natura della linea C.

Chiameremo *linea speciale* una linea C , il cui corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ si annulla nei punti di C .

Esistenza di infinite linee speciali.

8. Si consideri una linea C , si dia alla corrispondente funzione $v_1(s)$, soluzione dell'equazione integrale (7), il segno positivo, e si indichi con H il valore costante che il corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ prende nei punti di C . Osserviamo che per ρ abbastanza grande la $V_1(\xi, \eta)$ avrà valori maggiori di qualunque numero positivo arbitrariamente dato; sicchè, in virtù della continuità, dato ad arbitrio un numero H' maggiore di H , esisterà nell'area infinita σ' limitata da C un luogo C' di punti (ξ, η) tali che:

$$V_1(\xi, \eta) = H'.$$

Dimostriamo anzitutto che il luogo C' abbraccia C , ossia che non è possibile allontanarsi indefinitamente dai punti di C sul piano, senza incontrare in qualche punto il luogo C' .

Infatti, congiunto mediante una linea piana qualsiasi \mathcal{A} un punto arbitrario P di C con un punto qualsiasi P'' dell'area σ' , nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ abbia un valore $H'' > H'$, si ha, in virtù della continuità, che un punto almeno di C' deve far parte della linea \mathcal{A} .

Da quanto precede risulta intanto che farà certamente parte del luogo C' una linea Γ chiusa, abbracciante C .

Aggiungiamo che nessun altro punto del piano discosto da Γ può far parte del luogo C' . Infatti nel caso contrario questo punto, secondo che si troverà nell'interno dell'area finita limitata da C e da Γ , o nell'interno dell'area infinita limitata da Γ , rappresenterà un punto, non facente parte del contorno, nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ piglia il suo valore massimo o minimo. Il che è impossibile.

Per la medesima ragione la linea Γ non può intersecarsi in alcun suo punto.

Possiamo dunque concludere che *il luogo C' è formato da una linea chiusa semplice, che non si interseca in alcun suo punto e che abbraccia la linea C .*

9. Indichiamo con n' la direzione della normale nei punti di C' rivolta verso l'area finita da essa racchiusa, e con s' l'arco della curva C' .

Osserviamo che, essendo i punti di C' discosti da C , le derivate prime di $V_1(\xi, \eta)$ lungo la linea C' saranno finite e continue.

Ciò premesso, si consideri un punto (ξ, η) qualsiasi interno all'area

piana finita σ_1 limitata da C e da C' . Applicando la formola di Green, si avrà:

$$\begin{aligned} V_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \log r \frac{d\overline{V}_1}{dn} - V_1 \frac{d \log r}{dn} \right\} ds + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left\{ \log r \frac{dV_1}{dn'} - V_1 \frac{d \log r}{dn'} \right\} ds' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \log r \cdot v_1(s) + H \frac{d \log r}{dn} \right\} ds + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left\{ \log r \frac{dV_1}{dn'} - H' \frac{d \log r}{dn'} \right\} ds'; \end{aligned}$$

e poichè:

$$\int_C \frac{d \log r}{dn} ds = 0, \quad \int_{C'} \frac{d \log r}{dn'} ds' = -2\pi,$$

risulterà, in virtù della (8),

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \log r \frac{dV_1}{dn'} ds' + H'.$$

Posto allora:

$$v'_1(s') = -\frac{dV_1}{dn'},$$

si avrà che lo strato:

$$V'_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} v'_1(s') \log r ds'$$

prende in tutti i punti dell'area finita limitata da C' (i punti di C' inclusi) il valore costante H' .

La formola (4), applicata all'area finita σ_1 , ci darà poi:

$$-\int_C \frac{d\overline{V}_1}{dn} ds + \int_{C'} \frac{dV_1}{dn'} ds' = 0,$$

ossia:

$$(13) \quad \int_C v_1(s) ds - \int_{C'} v'_1(s') ds' = 0.$$

Si osservi che la differenza $V_1(\xi, \eta) - V'_1(\xi, \eta)$ prende nei punti di C' il valore *zero*; inoltre, in virtù delle (10), (11) e della (13), per ϱ abbastanza grande essa si comporta come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; sicchè, in forza del teorema dimostrato al § 3, *dovrà aversi in tutta l'area infinita σ'' limitata da C' :*

$$V_1(\xi, \eta) = V'_1(\xi, \eta).$$

10. Si consideri una linea chiusa C , qualsiasi, tale che nei suoi punti non sia $V_1(\xi, \eta)$ uguale a costante. Si indichi con $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ lo strato

distribuito lungo la linea C_1 , avente nei punti di C_1 stessa un valore costante; e si determini la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s_1)$ in modo che sia:

$$(14) \quad \int_C v_1(s) ds = \int_{C_1} v_1^{(1)}(s_1) ds_1.$$

Dimostriamo che *non esiste alcuna linea C' , abbracciante le due linee C, C_1 , nei punti della quale sia:*

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = \text{costante}.$$

Infatti, in virtù della (14), la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ è armonica nel campo infinito σ'' limitato da C' ; e quindi dovrebbe aversi in tutto il campo σ'' (i punti di C' inclusi):

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0.$$

Ora la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$, essendo analitica in qualunque cerchio ω avente il centro in un punto qualsiasi di σ'' (in particolare di C') e tutto discosto da C e da C_1 , sarebbe uguale allo zero in tutti i punti di ω e quindi ancora in tutti i punti dell'interno dell'area infinita σ''' limitata da C_1 o da C e C_1 , secondo che la C_1 abbraccia o non abbraccia la linea C . Allora, in virtù della continuità, anche nei punti di C_1 dovrebbe aversi:

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

11. Da ciò che precede risulta l'esistenza di infinite linee speciali distinte.

Infatti sia C una linea chiusa qualsiasi, contenuta nell'interno di un cerchio Γ di raggio 1, i cui punti siano discosti dalla circonferenza γ di Γ . Scelta la corrispondente $v_1(s)$ positiva, il corrispondente strato semplice logaritmico $V_1(\xi, \eta)$ avrà su C un valore costante negativo; per cui esisterà una linea C' abbracciante C , nei cui punti sarà: $V_1(\xi, \eta) = 0$. Quindi, in virtù del teorema dimostrato al § 9, sarà C' una linea speciale.

Ciò posto, si consideri una nuova linea chiusa C_1 , contenuta nell'interno di Γ e discosta da γ , e tale inoltre che nei suoi punti non sia: $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$. Indichiamo con $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea C_1 ed avente un valore costante nei suoi punti. Supposto di avere scelto il segno positivo per la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s)$, avremo che il valore costante di $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ nei punti di C_1 sarà negativo; per cui esisterà una linea C'_1 abbracciante C_1 , nei cui punti sarà $V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0$. Questa linea C'_1 sarà allora una linea speciale, la quale, in virtù del teorema dimostrato al § precedente, sarà distinta da C' .

Si consideri ora una linea chiusa C_2 nell'interno di Γ e discosta da γ , e tale inoltre che nei punti di essa non sia nè $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$, nè

$V_1^{(1)}(\xi, \eta) = \text{costante}$. Esisterà una corrispondente linea speciale C'_2 , distinta da C' e da C'_1 .

Seguitando a ragionare nella medesima maniera, *risulterà appunto la esistenza di una serie infinita C', C'_1, C'_2, \dots di linee speciali tutte distinte, corrispondenti alla serie indefinita C, C_1, C_2, \dots di linee chiuse scelte con la legge ora indicata.*

Proprietà delle linee speciali.

12. In virtù del risultato al § 7 si ha che una linea speciale qualsiasi non può abbracciare, nè essere abbracciata da una circonferenza di raggio 1. Più in generale qui vogliamo dimostrare che *una linea speciale qualsiasi non può mai abbracciare (o essere abbracciata da) un'altra linea speciale.*

Infatti, supponiamo che una linea speciale C' possa essere abbracciata da un'altra linea speciale C'' . Si considerino gli strati $V'(\xi, \eta)$, $V''(\xi, \eta)$, distribuiti rispettivamente su C', C'' ed aventi rispettivamente su queste linee valori nulli. Supponiamo determinate le corrispondenti densità $v'(s')$, $v''(s'')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s') ds' = \int_{C''} v''(s'') ds''.$$

Allora l'espressione $V'(\xi, \eta) - V''(\xi, \eta)$ per ϱ abbastanza grande si comporterà come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; per conseguenza essa rappresenterà nell'area infinita σ'_1 limitata da C'' una funzione armonica. Potremo quindi applicare la formula (5) del § 2, la quale ci darà:

$$\int_{C''} \left\{ V'' \frac{\overline{d(V' - V'')}}{dn''} - (V' - V'') \frac{\overline{dV''}}{dn''} \right\} ds'' = 0;$$

e poichè lungo C'' si ha:

$$V'' = 0, \quad \frac{\overline{dV''}}{dn''} = -v''(s''),$$

così si dovrà avere:

$$\int_{C''} V' \cdot v'' \cdot ds'' = 0.$$

Ora questa uguaglianza è impossibile; perchè la $v''(s'')$ nei punti di C'' non è identicamente nulla e nei punti stessi di C'' si ha:

$$V' > 0, \quad v'' \geq 0.$$

Da questo teorema risulta, come corollario, la seguente proposizione: *una linea C è certamente non speciale, se esiste una linea speciale che l'abbraccia o che è da essa abbracciata.*

13. Aggiungiamo ancora il seguente risultato: *Se per una linea qualsiasi C non speciale si sceglie, come si è sempre fatto, il segno positivo per la densità $v_1(s)$ del corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$, si ha che il valore costante di $V_1(\xi, \eta)$ nei punti di C è positivo o negativo, secondo che esiste una linea speciale C' abbracciata da C o che abbraccia C.*

Infatti, sia C tale che esista una linea speciale C' da essa abbracciata. Se il valore costante della corrispondente $V_1(\xi, \eta)$ fosse negativo, esisterebbe una linea speciale C'', la quale dovrebbe abbracciare C e quindi anche C'. Ciò che è impossibile.

Supponiamo ora che la linea C sia tale che esista una linea speciale C' abbracciante C. Se il valore costante della $V_1(\xi, \eta)$, corrispondente alla linea C, fosse positivo, a *fortiori* dovrebbero essere positivi i valori di $V_1(\xi, \eta)$ nei punti di C'; ed allora, indicando con $V'(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea C' ed avente valori nulli nei punti della C' stessa, e supposta determinata la corrispondente densità $v'(s')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s') ds' = \int_C v_1(s) ds,$$

avremo, ragionando come al § precedente, la seguente uguaglianza:

$$\int_C V_1 \cdot v'(s') ds' = 0,$$

che è assurda.

Astronomia — *Osservazioni astrofisiche e fotografiche della cometa 1910 a, eseguite nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

L'Accademia è già stata informata dal prof. Millosevich della scoperta e della posizione e corso della cometa, dedotti dalle osservazioni fatte nel R. Osservatorio al Collegio Romano. Ho l'onore di comunicare all'Accademia una Nota preliminare sulle osservazioni astrofisiche che abbiamo potuto fare all'Osservatorio di Catania nelle condizioni sfavorevoli causate dal chiarore del crepuscolo e poi anche da quello della luna, dalla brevità dell'intervallo fra il tramonto del sole e quello della cometa, ed inoltre dal tempo ostinatamente e singolarmente cattivo per Catania.

In seguito sarà pubblicato uno studio più completo delle dette osservazioni e delle fotografie fatte.

Prima che l'Osservatorio di Catania avesse notizia della comparsa di questa cometa, essa fu scorta per caso il 22 gennaio, poco dopo il tramonto del sole, da mio figlio Ugo, giovanetto dotato di vista molto acuta. Corremmo subito agli strumenti, ma prima che questi fossero puntati la cometa era già scomparsa dietro le nubi a ponente.

Si fece appena a tempo a vederla anche col binocolo; aveva il nucleo lucidissimo, circa come stella di prima grandezza, la chioma pure assai lucida, la coda dritta, poco divergente, quasi verticale. Il nucleo e tutta la parte più lucida della cometa erano di colore decisamente giallo-rossiccio.

Per il giorno seguente le osservazioni furono così organizzate:

Riccò all'equatoriale *Cooke* di 15 cm. apertura: osservazioni visuali, dirette e spettroscopiche.

Bemporad all'equatoriale *Steinheil* di 8 cm. apertura, fornito di fotometro registratore a cuneo, avrebbe tentato di fare misure fotometriche.

Horn all'equatoriale fotografico di 33 cm. apertura e 344 cm. lunghezza focale, al quale avevamo unita una seconda camera con obbiettivo doppio *Zeiss* di 11 cm. apertura e 44 cm. lunghezza focale, che avevo giusto acquistato e poi fatto montare dal meccanico dell'Osservatorio C. Strano, col proposito di studi astro-fisici sulla cometa di Halley; e ne avevo determinata rigorosamente la posizione del fuoco il 3 ed il 4 gennaio. Al medesimo equatoriale avevamo attaccata pure una terza camera fotografica, munita di obbiettivo doppio *Voigtländer* di 5 cm. apertura e 20 cm. lunghezza focale; per modo che si potevano fare simultaneamente tre fotografie della cometa, ottenendo immagini di diversa grandezza ed intensità.

Osservazioni visuali.

22 gennaio: dalle ore 15 in poi ho cercato inutilmente la cometa: tramontato il sole vi sono nubi ad ovest; alle 17^h45^m, in uno squarcio fra le nuvole, vedo bene la cometa. Nel *Cooke* col minore ingrandimento 35 il nucleo ha forma di disco molto vivo e ben distinto, la chioma è falcata, passante per il nucleo, la coda ha contorno parabolico; è dritta, opposta al sole; tutta la parte più lucida della cometa ha colore rossiccio.

23 gennaio: è nuvoloso; il 24 la cometa ha lo stesso aspetto come al 22, ma si osserva che il lato nord è più lucido e più nettamente terminato dell'altro; nel mezzo della chioma e della coda vi è uno spazio oscuro. La cometa ha il colore rossiccio molto sentito. Il prof. Bemporad trova col fotometro che lo splendore del nucleo è pari a quello di una stella di 3^a. Si tenta l'osservazione spettroscopica, ma la cometa tramonta dietro i fabbricati.

25 e 26 gennaio: nuvolo; al 27 si trova la cometa col *Cooke* a 17^h 57^m: è poco distinta, ma crescendo l'oscurità, diviene sempre più bella. Ha

lo stesso aspetto come al 24, però lo spazio oscuro interno è meno deciso, ed al lato sud si nota un'altra massa assai men luminosa, come seconda coda, che ha il lato sud un poco più lucido del resto, e convesso verso sud. La tangente alla parte più lucida del lato nord piega di circa 3° verso nord dalla verticale; ma poi il detto lato nord, che è sensibilmente convesso, volge verso sud, cosicchè l'insieme della cometa ad occhio nudo si vede prossimamente verticale fino ad α Pegasi; poi la coda volge con forte curvatura ancora più a sud e l'estremità si perde sotto γ Pegasi: ciò dà una lunghezza di circa 30° .

Il prof. Bemporad trova che lo splendore del nucleo è circa eguale a quello di una stella di 4^a .

Collo spettroscopio oculare *Clean*, applicato davanti all'oculare di ingrandimento 75, si vede lo spettro continuo del nucleo assai lucido e completo dal rosso al violetto, con tre nodi lucenti, corrispondenti al luogo delle tre bande note degli idrocarburi; il più forte ed esteso nel verde, e forse è doppio; un altro minore nel bleu; un altro men deciso nel giallo: non riesco a distinguere la riga gialla del sodio, forse perchè confusa colla banda gialla a causa della poca dispersione dello spettroscopio.

28 gennaio. L'aspetto della cometa è come ieri, ma è meno luminosa. Al prof. Bemporad risulta un leggero aumento della luce del nucleo rispetto a ieri: ma l'osservazione fotometrica è stata fatta in condizioni molto sfavorevoli. Col piccolo spettroscopio a fessura (senza cannocchialino) di Dubosq si vedono le tre bande degli idrocarburi, però poco estese: ma osservando la cometa mentre tramonta dietro i fabbricati, ho notato che le dette bande si vedono anche un po' dopo che il nucleo è scomparso.

29, 30, 31 gennaio e 1° febbraio, nuvolo.

2 febbraio. Vista la cometa fra le nubi: la parte più vicina al nucleo è allargata molto a triangolo o ventaglio: il lato nord è sempre più lucido ed alquanto convesso. La luce della cometa è molto diminuita; il 3 febbraio fra le nubi si è trovata la cometa molto debole, cosicchè si vede difficilmente ad occhio nudo. Nel cannocchiale il nucleo è ancora distinto, ma la coda è quasi invisibile: pare abbia la forma di prima: non è percettibile la colorazione rossiccia.

Dopo, sia a causa delle nubi, sia per la debolezza della luce della cometa, non si è potuto più fare su di essa osservazioni astrofisiche.

Fotografie.

Le 18 fotografie eseguite dal dott. Horn, e più o meno riuscite secondo le condizioni del cielo, ebbero le seguenti esposizioni:

Equatoriale fotografico.

| Mese | Giorno | Esposizione (T. M. di Catania) | Posa |
|----------|--------|-----------------------------------|----------------|
| | | h m h m | |
| Gennaio | 24 | 5,56 — 6,1 | 5 ^m |
| " | 24 | 6,9 — 6,26 | 17 |
| " | 27 | 6,13 — 6,35 | 22 |
| " | 28 | 6,21 — 6,35 | 14 |
| " | 31 | 6,25 — 6,34 | 9 |
| Febbraio | 2 | 6,31 — 6,46 | 15 |
| " | 3 | 6,30 — 6,51 | 21 |

Obbiettivo Zeiss.

| Mese | Giorno | Esposizione (T. M. di Catania) | Posa |
|----------|--------|-----------------------------------|----------------|
| | | h m h m | |
| Gennaio | 24 | 5,56 — 6,1 | 5 ^m |
| " | 24 | 6,9 — 6,26 | 17 |
| " | 27 | 6,13 — 6,35 | 22 |
| " | 28 | 6,26 — 6,34 | 8 |
| " | 31 | 6,25 — 6,34 | 9 |
| Febbraio | 2 | 6,31 — 6,46 | 15 |
| " | 3 | 6,30 — 6,51 | 21 |

Obbiettivo Voigtländer.

| Mese | Giorno | Esposizione (T. M. di Catania) | Posa |
|----------|--------|-----------------------------------|-----------------|
| | | h m h m | |
| Gennaio | 27 | 6,13 — 6,35 | 22 ^m |
| " | 28 | 6,26 — 6,34 | 8 |
| Febbraio | 2 | 6,31 — 6,46 | 15 |
| " | 3 | 6,30 — 6,51 | 21 |

Ho l'onore di presentare all'Accademia come saggio una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta all'equatoriale fotografico, dove un minuto d'arco è rappresentato da 1 mm., una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta coll'obbiettivo *Zeiss*, dove un grado è rappresentato da 7 1/2 mm., ed una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta coll'obbiettivo *Voigtländer*, dove un grado è rappresentato da 3 1/3 mm. Si vede subito che le immagini fotografiche corrispondono alla descrizione ed ai disegni fatti dietro l'osservazione visuale.

CONCLUSIONE.

Dunque per questa cometa abbiamo prossimamente l'eguaglianza della immagine visuale, colla fotografica, mentre in altre comete, per esempio nelle recenti di Daniel e di Morehouse, la differenza delle due immagini era notevolissima. Ciò significa che in questa cometa le principali radiazioni erano comprese nella parte dello spettro capace d'impressionare l'occhio umano e nello stesso tempo la lastra fotografica al bromuro d'argento (non ortocromatica), cioè radiazioni comprese specialmente tra il verde ed il violetto; mentre nelle altre due comete citate è noto che vi era abbondanza di radiazioni violette ed ultraviolette. Le nostre osservazioni spettroscopiche di questa cometa, per quanto incomplete, dimostrano infatti abbondanza di raggi visibili nello spettro del nucleo, continuo e molto esteso, cui si aggiungono le radiazioni bleu, verde e gialla degli idrocarburi, come pure quelle gialle del sodio, che altri osservatori, sia prima di noi, sia con mezzi più potenti, hanno potuto vedere e fotografare.

La colorazione giallo-rossiccia della cometa in discorso non è fatto nuovo: fu notevolissima nella cometa Wells e nella grande del 1882. Nella prima di queste comete la radiazione del sodio era così grande da dare una immagine della parte lucida della cometa nella fessura allargata dello spettroscopio. L'altra cometa dello stesso anno, la 1882 II, quando era vicina al perielio, aveva uno spettro ricco di radiazioni metalliche, ed io osservai che allontanandosi la cometa dal perielio quelle radiazioni scomparivano, mentre quelle degli idrocarburi si facevano sensibili e poi sempre più distinte; ed infine restavano soltanto le tre bande degli idrocarburi medesimi con traccia di spettro continuo. Nello stesso tempo, anzi ben presto, scompariva la colorazione gialla della cometa, e restava il colore azzurrino ⁽¹⁾.

Questi fenomeni delle comete sono conformi alla esperienza di Hasselberg ⁽²⁾, il quale ha fatto vedere che se si ha un tubo di Geissler contenente un idrocarburo e sodio, al passaggio della corrente elettrica si vedono solo le bande degli idrocarburi; ma se si scalda, diviene visibile e sempre più brillante la riga del sodio, mentre le bande degli idrocarburi si indeboliscono; lasciando raffreddare si producono i fenomeni inversi.

Ciò prova che le dette variazioni dello spettro delle comete sono dovute al riscaldamento prodotto in esse dal sole nel passaggio al perielio.

⁽¹⁾ Mem. della Soc. degli Spettr. ital, vol. XII, 1883, pag. 217.

⁽²⁾ Memorie idem, vol. XI, 1882, pag. 31 (2°).

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione. II. Il Monte Cistella, la Valle della Cairasca e la galleria elicoidale di Varzo* (Profili 3, 4, 5, 7). Nota del Socio CARLO DE STEFANI ⁽¹⁾.

Prima di passare alla Cairasca esaminiamo la cresta dal Pizzo de' Diei al Corno Cistella, che forma lo spartiacque fra la Cairasca e il Devero. Essa segna il culmine dell'ellissoide Sempione-Toce e nello stesso tempo risponde quasi all'asse minore dell'ellissoide stessa, alquanto più prossimamente però alla estremità sua di S. O. Considerando gli strati della suddetta cresta nella direzione dell'asse minore dell'ellissoide, dal Rio Bondolero, anzi dal Helsenhorn a N. O., fino al Corno Cistella a S. E. (prof. 3), si vede che a N. O. sul Bondolero, dove appaiono alla superficie solo i Calceschisti (n. 4), questi scendono ordinariamente di circa 10°-30° a N. O.; essi diventano poi orizzontali come le altre rocce adiacenti sulla cresta; ma però ad Est del Corno Cistella accennano a scendere per brevissimo tratto e con inclinazione di 5° verso S. E., ricoprendo l'ellissoide. Sul versante del Devero tutti gli strati mostrano le testate a picco ed orizzontali, salvo la lieve tendenza estrema a S. E. (prof. 8). Ivi, sopra i Micascisti (n. 2), scarsissimi come già si disse, sulla destra del Devero, è il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) altissimo; poi sono i Calceschisti con Micascisti gneissici intercalati (n. 4) abbastanza alti sul Bondolero, ristretti sulle cime, e al di sopra, il Pizzo de' Diei, il Cistella ed il Corno omonimo sono formati dal *Gneiss* a due miche, detto di Lebendun e di Valgrande (n. 5) isolato ed interrotto. È un *testimonio* un superstita alla denudazione, che si connette più lungi con lo stesso *Gneiss* il quale sopra i Calceschisti si ritrova in alto sulla sinistra del Bondolero, nel M. Moro in Val Dentro e in Val Grande. In principio, d'accordo, parmi col Gerlach, vidi in quel *Gneiss* un indizio di rovesciamento e l'estremo lembo di una piega ricoprente, proveniente da N. O. Oggi invece lo riguardo come residuo di un ricoprimento regolare della zona n. 5 dell'ellissoide; che infatti ha la sua continuazione oltre che a N. O., anche a S. E. sul Toce e nella Valle dell'Isorno e tutto intorno negli *Gneiss* scistosi di Crevola, di Preglia ecc., che cingono quasi tutta l'ellissoide. Così pure i calceschisti sottostanti figurano, a uso copertura, nel Pizzo del Forno a N. O., indi oltre il Toce e tutto intorno anche dalla foce di Val Divedro in Toce fino sopra Gondo (prof. 1, 3, 4, 5, 6), dove pur sono identici quantunque nelle Carte geologiche siano segnati quasi tutti solo come *Gneiss* e come una fascia diversa dalle rocce precedenti, senza dubbio per la mano diversa che redasse la Carta in quel tratto. ▲ tale continuazione

(¹) Vedi questi Rendiconti fasc. 3°, 1° sem. Seduta del 6 febbraio 1910.

delle rocce della cresta del Cistella ed alla conseguente copertura regolare dell'ellissoide, accenna pure il fatto che a S. O. della cresta, verso la Cairasca ed il Sempione, tutte le masse rocciose scendono con relativa rapidità verso S. O. (prof. 7, 8).

La Carta Svizzera, redatta quivi dallo Stella, segna il limite delle rocce con esattezza sulla sinistra della Cairasca. Mi sembra però che alcune frange esterne assai potenti e le rispettive faglie abbiano leggermente complicato la stratigrafia, in quanto alcuni strati si abbassano più di quanto la naturale inclinazione comporterebbe. Intanto però nell'alto della Fresaia e del Rio di Varzo la zona dei Calceschisti (n. 4) scende già assai (prof. 8), ed altri lembi ancora, sempre al di sopra dello *Gneiss* (n. 3), se ne vedono a mezza costa tra il Rio Callaiolo, la Fresaia, il Rio Maulone e il Rio di Varzo affluenti alla sinistra della Cairasca e della Diveria.

Il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) che sulla destra del Devero è assai alto, qui sulla sinistra della Cairasca è ridotto a circa 1000 m. e più in basso a circa 600 m. d'altezza. Esso però, anco a sinistra della vallata, chiude palesemente l'anticlinale e l'ellissoide così a S. a valle di Varzo, come a N. a monte di Gebbo (prof. 3, 4, 5). Nemmeno qui si presenta in esso alcun indizio di piega sdraiata. Sotto esso *Gneiss* (n. 3) si presenta la stessa serie n. 2 dei Micaschisti di Baceno (prof. 4, 7); però con altezza e con estensione maggiori che non sul Devero e paragonabili a quelle che hanno sul Toce. Sono Micaschisti granatiferi e staurolitici, accompagnati da Micaschisti molto quarzosi a due Miche, da Micaschisti gneissici e da Scisti nodulosi, Calceschisti, Cipollini, alquanti Calcari e Anidriti. La Carta Svizzera segna in qualche punto quei Micaschisti sotto gli *Gneiss*; ma nei tratti maggiori, dando più importanza alle affinità coi Calceschisti superiori (n. 4) che alle differenze, li segna addirittura come Calceschisti della zona 4. Se litologicamente, come dicevo, e come sempre avviene, vi è talora molta affinità, però stratigraficamente e cronologicamente essi ne sono diversi e più antichi, appartenendo alla zona 2. Essi sono la esatta ed immediata continuazione dei Micaschisti di Baceno e del Toce che risorgono oltre la cresta del Cistella (prof. 8). Questa prima chiara e netta constatazione di fatto è assai importante per lo scopo nostro.

Passiamo alla destra della Cairasca e della Diveria, che ne è la continuazione.

Ivi Calceschisti della zona 4 sulle creste in alto non se ne vedono, eccetto alle cime del Pizzo Teggiolo (prof. 5, 6), dove sono sovrapposti ed accompagnati da Calcari, Cipollini e Anidrite, e sono estesi in superficie nel versante orientale del Pizzo ma ben poco alti in potenza. Sotto di essi si estende il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3), il quale forma un anticlinale ben appariscente e chiuso così in alto, come a N. a monte del Riale rimpetto a Croso e come a S. della Diveria, là dove le si unisce la Cairasca e dove entra la galleria elicoidale

di Varzo (prof. 5). In questo lato sud ne son poi formati per lunghissimo tratto i due versanti della Diveria. Qui a S. il *Gneiss* pare anche più esteso, poichè per lungo tratto si susseguono strati orizzontali o quasi, a cominciare intorno a Trasquera sulla destra della Cairasca e seguitando a S., soggetti a leggerissime parziali curvature, o appena pendenti ad E. rimpetto a Varzo, finchè verso Campeglia, diventando quasi verticali, si nascondono sotto i terreni più recenti. Invece dall'entrata della Cairasca in Diveria (prof. 4, 5) verso N. il *Gneiss* sale leggermente formando l'ala S. O. dell'anticlinale o l'unghia estrema dell'ellissoide che dire si voglia, e sale lentamente fino al Pizzo Teggiolo per scendere poi molto più rapidamente a chiudere l'ala N. rimpetto Croso. Sotto il Pizzo Teggiolo ha un'altezza inferiore a quella che ha in Val Devero, pari a quella ordinaria sulla sinistra della Cairasca. Sotto l'anticlinale gneissico, a soli m. 2500 dal gran *tunnel*, la Carta del Gerlach, e meno bene ancora la Carta Svizzera, segnano solo uno scarso e basso lembo di Micaschisti di Baceno (n. 2) nei dirupi verticali lungo la Cairasca. Invece essi acquistano estensione grandissima quanto sulla sinistra della valle; altro accertamento di fatto che ha grande importanza pel caso nostro. Infatti si estende assai alto l'anticlinale dei Micaschisti granatiferi, staurolitici, quarzosi, coi soliti Calceschisti, Calcari, Anidrite, e talora con schisti nodulosi e cloritici, con abbondanti banchi quarzosi. Questi ultimi scisti rispondono litologicamente a quelli della zona 4 sovrastante al *Gneiss* d'Antigorio, ed a loro volta trovano poche analogie nella continuazione dell'anticlinale in Val Devero ed in Val di Toce, dove prevalgono i Micaschisti granatiferi, qui sulla Cairasca più scarseggianti.

Alta serie di frane anche provenienti dal *Gneiss*, e di detriti morenici, copre il suolo a giustificare la difficoltà di un pronto riconoscimento del terreno; ma dovunque è scoperto il suolo primitivo, a Vallerosa, a Ciojna, al Riale si scopre la zona n. 2. Il *Gneiss* non forma che i dirupi della sommità.

La morfologia aiuta il discernimento della stratigrafia. La pendenza all'uscita della valle Cairasca verso la Diveria nel *Gneiss* d'Antigorio a destra della Cairasca è di 8° ad O. (prof. 7): ma quasi tosto, all'imbocco Est della galleria di Trasquera, gli strati del Micaschisto, del Cipollino marmoreo, dell'Anidrite immediatamente e regolarmente sottostanti al *Gneiss*, insieme con gli strati inferiori di questo, si inclinano di 12° a S. 30 O. Però sulla opposta sinistra riva della Cairasca, all'imbocco più orientale della Galleria elicoidale di Varzo, i Cipollini e gli scisti nodulosi sottostanti acquistano localmente una inclinazione di più di 45°. Questa si mantiene per poco, poichè più sopra e a monte le pendenze sono molto minori, essendo gli strati quasi orizzontali fino verso il Bragio e Fracchia, quantunque non manchino pieghe secondarie, per es. nei cipollini cloritici sotto Oro del Vino che hanno pendenze invertite a N. E. A monte di Fracchia e Vallerosa e specialmente a S. di

Cioina gli strati si rialzano con curva più ardita, ma le pendenze si mantengono di circa 8° a S. O., come anche a sinistra della valle sotto Maulone. Ad ogni modo, essi hanno una scesa, sebbene non molto rapida, verso la grande Galleria del Sempione. A N. O. questi stessi strati del Micascisto granatifero e staurolitico chiudono regolarmente l'anticlinale.

Non mancano qua e là delle infinite rotture, delle pieghettature e delle ondulazioni secondarie, ma non viene alterato l'andamento generale degli strati.

Non vi ha dunque la menoma traccia superficiale di pieghe sdraiate nei Micascisti n. 2 e negli *Gneiss* d'Antigorio n. 3; e nei banchi o negli strati esterni sempre ben visibili non vi ha affatto indizio di quegli andamenti supposti nelle interpretazioni recenti date pel *tunnel* del Sempione.

Fig. 7



Ma prima di parlare del gran *tunnel*, premettiamo qualche parola sulla galleria elicoidale detta di Varzo.

Questa descrive un circolo e corre tutta nella zona sottostante al *Gneiss* d'Antigorio, cioè nello Schisto n. 2.

La galleria, a partire dal versante sud, traversò successivamente m. 800 di Micascisti, m. 850 di Calceschisti e di zona calcareo scistosa, m. 900 dei soliti Micascisti, e ancora m. 400 di zona calcareo-scistosa e di Calceschisti.

Questa galleria, l'unica della ferrovia del Sempione che traversi gli Schisti n. 2, dà un'idea della multiforme costituzione di questi. La serie che essa presenta può essere completata con quella breve successione di strati micascistosi, calcarei e anidritici che stanno immediatamente sotto al *Gneiss* n. 3, all'imbocco est della Galleria di Trasquera (prof. 7). Questi strati, pendenti, coi *Gneiss* coi quali sono concordanti, 12° a S. 30 O. sono in quel luogo i più alti della zona schistosa n. 2. Essi coprono a Nord la breve zona di Micascisti nei quali è aperta l'entrata S. od O. della galleria elicoidale, mentre a S. stanno direttamente sopra ai Cipollini nei quali è aperta l'imboccatura N. od E. della stessa galleria. Ragionevolmente si ritiene che questa zona di Cipollini, Calceschisti e calcari dell'im-

boccatura N, risponda alla zona complessa delle stesse rocce che fu incontrata fra le progressive 560 e 1440 dall'imbocco S. Sotto tale zona sèguita l'alta serie dei Micascisti e Scisti cloritici n. 2. In breve spazio si ripete qui quella variabilità di rocce che si verifica in ogni altro punto della zona scistosa n. 2, specialmente nella valle della Cairasca. I calceschisti, i cipollini, le lenti di calcare, ed in minor proporzione l'anidrite, si alternano per ogni dove, e inopportunamente, come già dicevo, fu creduto che calcari e anidrite formassero zone speciali, e possibilmente sincrone fra loro al confine dei Micascisti. La successione degli strati incontrata dalla galleria elicoidale non presenta anomalie di sorta rispetto alla successione di strati più vicini o più lontani della stessa zona n. 2. Del *Gneiss* d'Antigorio non fu trovata alcuna traccia negli strati più antichi traversati dalla galleria, nè, giudicando dall'esterno, si poteva trovare. La supposizione che esso si ripresenti a profondità è fondata soltanto sulla ipotesi del carreggiamento.

Nelle sorgenti incontrate nelle zone calcaree durante lo scavo della galleria elicoidale si è voluto trovare un indizio che quelle zone a N. si pieghino a sinclinale, riattaccandosi coi calcari verso Nembro e Campo, perchè se le dette rocce disposte a cupola si immergessero in tutti i lati sotto lo *Gneiss* non dovrebbero ricevere tributo di acque meteoriche. Però non vedo la necessità di siffatte supposizioni, perchè in realtà gli strati calcarei si alzano a N. e ad E. della Cairasca venendo a contatto con la superficie e sorbendone acque. Non si può dunque citare la galleria elicoidale di Varzo fra le conferme di una piega sdraiata e di un ricoprimento nella galleria del Sempione avente direzione ortogonale a questa. D'altra parte, se questo ricoprimento esistesse a levante ed esistesse in pari modo a settentrione, da qual parte sarebbero sopraggiunte, come un bolide selenitico, le rocce del Sempione?

Matematica. — *Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali.* Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Corrispondente ERNESTO PASCAL.

1. In una Nota testè pubblicata in questi Atti ⁽¹⁾, il prof. E. Pascal dimostra che le tangenti alle curve integrali dell'equazione $\frac{dy}{dx} = P_n(y)$, ove $P_n(y)$ è un polinomio di grado n in y a coefficienti funzioni di x , condotte per i punti aventi la medesima ascissa inviluppano una curva algebrica di ordine n .

Questo risultato si può riguardare come un caso particolare di una proposizione assai generale, che qui stabiliremo insieme con altre analoghe per gli integrali di certi sistemi di equazioni.

2. Sia

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^py}{dx^p}, \dots, \frac{d^ky}{dx^k}\right) = 0$$

un'equazione differenziale d'ordine k , ove f si suppone simbolo di funzione continua in un campo C rispetto a tutti gli argomenti e di più razionale in $\frac{d^py}{dx^p}$ e $\frac{d^ky}{dx^k}$ con $0 \leq p < k$.

Sia data una famiglia di ∞^{n+1} curve piane rappresentata dall'equazione

$$(2) \quad F(X, Y, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0$$

razionale in X, Y e negli $n+1$ parametri a_1, a_2, a_{n+1} ove è $n \geq k$.

Se $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(p-1)}, y_0^{(p+1)}, \dots, y_0^{(k-1)}$ sono k valori assegnati ad arbitrio (purchè contenuti nel campo C) si consideri la semplice infinità Γ_p di curve integrali di (1) soddisfacenti alle $k-1$ condizioni

$$y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \dots, \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)}, \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \dots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}$$

per $x = x_0$.

Or bene noi mostreremo che

l'inviluppo delle curve di (2) osculatrici in x_0, y_0 alle curve integrali Γ_p è una curva algebrica.

(¹) E. Pascal, Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali, Rend. della R. Accad. dei Lincei (5), t. 18, 1909, 2° semestre.

Colla nota regola di derivazione delle funzioni implicite si dedurrà dalla (2) derivando n volte

$$\frac{d^i Y}{dX^i} = F_i(X, Y, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove le F_i sono funzioni razionali in $X, Y, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Indicheremo con \bar{F} e con \bar{F}_i ciò che diventano F e F_i quando si è posto $X = x_0, Y = y_0$.

Dall'equazione (1) si ottengono mediante $n - k$ derivazioni successive

$$\frac{d^{k+i} y}{dx^{k+i}} = f_i \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{k+i-1} y}{dx^{k+i-1}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n - k),$$

ove le f_i sono ancora razionali in $\frac{d^p y}{dx^p}$ e $\frac{d^k y}{dx^k}$; denoteremo con \bar{f}_i ciò che diventa f_i quando si ponga

$$x = x_0, y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \dots, \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)},$$

$$\frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \dots, \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}.$$

Infine denotiamo con \bar{f} ciò che diviene f quando, oltre alle predette sostituzioni, si faccia $\frac{d^k y}{dx^k} = \bar{F}_k$.

Ciò posto, l'eliminazione degli $n + 1$ parametri a_1, a_2, \dots, a_{n+1} fra le $n + 2$ equazioni

$$F(X, Y, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0,$$

$$\bar{F} = 0, \bar{F}_1 = y_0', \bar{F}_2 = y_0'', \dots, \bar{F}_{p-1} = y_0^{(p-1)}, \bar{F}_p = \frac{d^p y}{dx^p}, \bar{F}_{p+1} = y_0^{(p+1)} \dots$$

$$\dots, \bar{F}_{k-1} = y_0^{(k-1)}, \bar{f} = 0, \bar{f}_1 = \bar{F}_{k+1}, \bar{f}_2 = \bar{F}_{k+2}, \dots, \bar{f}_{n-k} = \bar{F}_n$$

porterà ad un'equazione

$$(3) \quad \Phi \left(X, Y, \frac{d^p y}{dx^p} \right) = 0$$

che per ogni valore c attribuito a $\frac{d^p y}{dx^p}$ rappresenterà la curva di (2) osculatrice alla curva integrale di (1) della varietà Γ_p , corrispondente a $\frac{d^p y}{dx^p} = c$.

La (3) è razionale nei tre argomenti. L'inviluppo delle curve (3) ha per equazione quella che risulta dalla eliminazione di α fra le due equazioni

$$\Phi(X, Y, \alpha) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

avendo, per comodità, scritto α in luogo di $\frac{d^p y}{dx^p}$; e poichè essa equazione sarà razionale in X e Y , la proposizione enunciata è dimostrata completamente.

3. Come caso particolare, si supponga $p = 0$, $k = 1$ e per curve (2) si prendano le ∞^2 rette del piano. Allora l'equazione (1) sarà della forma

$$(4) \quad \sum_{r=0}^n \sum_{s=r}^n A_{rs} y^{s-r} \left(\frac{dy}{dx} \right)^r = 0,$$

ove A_{rs} sono funzioni di x o, in particolare, costanti. Un facile calcolo mostra che in questo caso la (3) diviene

$$(5) \quad \sum_{q=0}^n \sum_{h=0}^q \sum_{k=0}^{n-q} (-1)^k \binom{h+k}{k} A_{h+k, n-q+h} (X - x_0)^{n-q-k} Y^h y^q = 0.$$

L'involuppo T delle tangenti alle curve integrali di (4) nei punti della retta $x = x_0$ ha per equazione il discriminante della (5) considerata come equazione algebrica di grado n in y , eguagliato a zero.

Se si osserva che i coefficienti delle potenze di y sono razionali interi in X e Y di grado n al più, si vede tosto che l'involuppo T è una curva algebrica di ordine non superiore ad $n(2n-1)$.

L'ordine di T può essere inferiore a $n(2n-1)$: se la $\frac{dy}{dx}$ entra al massimo al grado m , l'ordine T sarà $m(2n-1)$ al più, essendo allora i coefficienti delle potenze di y al più di grado m in X e Y . Due sottocasi sono notevoli:

1°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^m A_k \left(\frac{dy}{dx} \right)^k - \sum_{k=0}^n B_k y^k = 0 \quad (m < n).$$

Se si calcola il discriminante in parola è facile vedere che il suo grado si riduce a $m(n+m-1)$. Basta fare $m=1$ per avere il caso studiato dal prof. Pascal.

2°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{dy}{dx} \right)^k - \sum_{k=0}^m B_k y^k = 0 \quad (m < n).$$

Allora i coefficienti di y^q nell'equazione, di cui si deve calcolare il discriminante, sono in X e Y di grado q per $0 \leq q \leq n-m-1$, o sono di grado n per $q > n-m-1$, quindi l'ordine dell'involuppo T non supera

$$\frac{(n-m-1)(n-m)}{2} + (m+1)n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}.$$

4. Sia dato un sistema di due equazioni differenziali d'ordine k

$$(6) \quad \begin{aligned} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) &= 0, \\ \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ove le f e φ sono, in un determinato campo C , continue rispetto a tutti gli argomenti e razionali in $\frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$, delle quali non può mancare la stessa in entrambe le equazioni, e razionali pure in una derivata d'ordine inferiore a k , ad es. in $\frac{d^p z}{dx^p}$.

Sia data una varietà di ∞^{2n+2} curve storte rappresentate dalle equazioni

$$(7) \quad H(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}) = 0 \quad K(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}) = 0$$

razionali in $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$.

Se $x_0, y_0, z_0, y_0', z_0', \dots, y_0^{(p-1)}, z_0^{(p-1)}, y_0^{(p)}, y_0^{(p+1)}, z_0^{(p+1)}, \dots, y_0^{(k-1)}, z_0^{(k-1)}$ sono $2k$ valori fissati ad arbitrio in C , si consideri la semplice infinità $\Gamma_{p,z}$ di curve integrali del sistema (6) che soddisfano, per $x = x_0$, alle condizioni

$$(8) \quad \begin{aligned} y = y_0, z = z_0, \frac{d^p y}{dx^p} = y_0^{(p)}, \frac{d^i y}{dx^i} = y_0^{(i)}, \frac{d^i z}{dx^i} = y_0^{(i)} \\ (i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, k-1). \end{aligned}$$

Allora sussiste la proposizione:

Le curve osculatrici in x_0, y_0, z_0 alle curve integrali $\Gamma_{p,z}$ appartengono ad una superficie algebrica.

Col derivare n volte le (7) rispetto ad X , si traggono le $2n$ derivate

$$\frac{d^i X}{dX^i} = \Phi_{yi}, \quad \frac{d^i Z}{dX^i} = \Phi_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

che sono funzioni razionali di $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$. In esse si faccia $X = x_0, Y = y_0, Z = z_0$ e si indichino le equazioni che ne risultano con $\overline{\Phi}_{yi} : \overline{\Phi}_{zi}$, come pure denotiamo con $\overline{H}, \overline{K}$ i primi membri delle (7) ove si sono fatte le stesse sostituzioni.

Col derivare le (6) $n - k$ volte rispetto ad x , si traggono le derivate

$$\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} = f_i, \quad \frac{d^{n+i} z}{dx^{n+i}} = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - k)$$

che sono funzioni razionali in $\frac{d^p z}{dx^p}, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$. Indichiamo con $\overline{f}, \overline{\varphi}, \overline{f}_i, \overline{\varphi}_i$

ciò che divengono $f, \varphi, f_i, \varphi_i$ quando si fa in esse $x = x_0$, $\frac{d^p z}{dx^p} = \overline{\Phi}_{xp}$ e le sostituzioni (8).

Allora l'eliminazione dei $2n + 2$ parametri $a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$ fra le $2n + 4$ equazioni

$$\begin{aligned} H = 0, K = 0, \overline{H} = 0, \overline{K} = 0, \overline{f} = 0, \overline{\Phi}_{yp} = y_0^{(p)}, \overline{\Phi}_{zp} = \frac{d^p z}{dx^p} \\ \overline{\Phi}_{yi} = y_0^{(i)}, \overline{\Phi}_{xi} = z_0^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, k-1) \\ \overline{\Phi}_{y, h+r} = \overline{f}_r, \overline{\Phi}_{z, h+r} = \overline{\varphi}_r \quad (r = 1, 2, \dots, n-k) \end{aligned}$$

porta a due equazioni

$$\Psi_1\left(X, Y, Z, \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0, \quad \Psi_2\left(X, Y, Z, \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0$$

che rappresentano, per ogni valore c di $\frac{d^p z}{dx^p}$, la curva di (7) osculatrice a quella curva di Γ_{zp} che corrisponde a $c = \frac{d^p z}{dx^p}$. Essendo le due equazioni razionali in $X, Y, Z, \frac{d^p z}{dx^p}$, il luogo delle predette curve osculatrici è una superficie algebrica.

Per $p = 0$, si ha il corollario:

Le curve di (7) osculatrici alle curve integrali Γ_{0z} soddisfacenti alle condizioni $\frac{d^i y}{dx^i} = y_0^{(i)}, \frac{d^i z}{dx^i} = z_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) che si appoggiano alla retta $x = x_0, y = y_0$, o ad una curva algebrica $\theta(y, z) = 0$ in un piano $x = x_0$ se le (6) sono razionali anche in y , o ad una curva algebrica qualunque $\theta_1(x, y, z) = 0, \theta_2(x, y, z) = 0$ se le (6) sono razionali anche in x , appartengono ad una superficie algebrica.

Come caso particolare, se le (6) sono del primo ordine dei gradi m ed n rispetto ai tre argomenti $z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ e dei gradi r ed s rispetto alle due derivate, le tangenti alle curve integrali appoggiantesi alla retta $x = x_0, y = y_0$ è una rigata di ordine $mr + ns$; e se le (6) sono lineari in $z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ la rigata è una quadrica.

5. Infine dimostriamo la proposizione:

Le superfici della varietà di ∞^{n+1} superfici

$$(9) \quad F(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0,$$

ove F è razionale in tutti gli argomenti, osculatrici agli integrali del sistema di equazioni differenziali di primo ordine

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x, y, z),$$

che si appoggiano ad una retta $x = x_0, y = y_0$ se f e φ sono razionali in z , o ad una curva algebrica $\theta(y, z) = 0$ posta in un piano $x = x_0$ se f e φ sono razionali anche in y , o ad una curva algebrica qualunque $\theta_1(x, y, z) = 0, \theta_2(x, y, z) = 0$ se f e φ sono razionali anche in x , involuppano una superficie algebrica.

Dalle (10) si deducono per derivazione

$$\frac{d^i y}{dx^i} = f_i(x, y, z) \quad \frac{d^i z}{dx^i} = \varphi_i(x, y, z) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

e dalla (9) ritenendo Z e Y funzioni di X si ottiene derivando n volte rispetto ad X

$$F_i(X, Y, Z, \frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}, \dots, \frac{d^i Y}{dX^i}, \frac{d^i Z}{dX^i}, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si indichi con \bar{F} e \bar{F}_i ciò che divengono F e F_i quando si fa

$$X = x_0, Y = y_0, Z = z, \frac{d^r Y}{dX^r} = f_r, \frac{d^r Z}{dX^r} = \varphi_r \quad (r = 1, 2, \dots, i).$$

Allora se si elimina a_1, a_2, \dots, a_{n+1} fra le $n + 2$ equazioni

$$F = 0, \bar{F} = 0, \bar{F}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si ha un'equazione

$$\Psi(X, Y, Z,) = 0$$

che rappresenta per ogni valore di z la superficie di (9) osculatrice alle curve integrali di (10) in un punto della retta $x = x_0, y = y_0$. L'involuppo di codeste superficie ha per equazione, l'equazione algebrica in XYZ che nasce dall'eliminazione di z fra

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

In particolare i piani osculatori alle curve integrali di (10) appoggianti alla retta $x = x_0, y = y_0$, se f_1 e φ_1 sono lineari in y e z , involuppano un cono quadrico.

Negli altri casi dell'enunciato, le dimostrazioni sono analoghe.

Matematica. — *Sopra speciali trascendenti che si connettono colle teorie dei numeri.* Noa di ENRICO ZONDADARI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica — *Sugli accelerometri a liquido.* Nota del dott. EMILIO ODDONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Gli studi sismologici fatti recentemente dal prof. Lo Surdo, libero docente di Fisica terrestre nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, hanno destato tra gli specialisti vivo interesse e speranzosa aspettativa.

Dal luglio 1909 egli pubblicò quattro Note di sismologia dirette tutte allo scopo concreto della determinazione in misura assoluta dell'intensità dei macrosismi. Mi si permetta di ricapitarle brevemente:

La prima Nota, intitolata: *Il funzionamento dei sismografi* ⁽¹⁾ è una breve rassegna di orientamento sul problema sismografico. La seconda Nota dal titolo: *Sulle osservazioni sismiche* ⁽²⁾, pone il quesito se sia possibile che un sismografo registri direttamente l'accelerazione, anzichè, come si è tentato di fare finora, lo spostamento del suolo, e vi risponde affermativamente.

Mettendo l'integrale generale, dell'equazione completa

$$(1) \quad a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega,$$

sotto la forma:

$$(2) \quad a = \frac{1}{\beta^2} \left(\Omega_0 + \frac{\omega}{\tau} t \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\omega}{\tau} \left[\left(\frac{2}{\beta} + t \right) e^{-\beta t} - \frac{2}{\beta} \right]$$

ottiene un primo termine che dà in ogni istante lo spostamento che corrisponde esattamente al valore dell'accelerazione e rappresenta la soluzione idealmente perfetta del problema; ed un secondo termine, che ha per causa il periodo proprio del sistema oscillante. Quest'ultimo perturba; talchè converrà fare assumere ad esso un valore piccolissimo.

Per ciò β dev'essere tanto più grande quanto più grande è il valore di $\frac{\omega}{\tau}$. È bensì vero dice l'A. che aumentando β , diminuendo cioè il pe-

⁽¹⁾ Il Nuovo Cimento, 1909, pag. 129.

⁽²⁾ Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fasc. 6°, sec. sem. 1909. Anche il Nuovo Cimento, 1909, pag. 201.

riodo proprio del sistema oscillante non smorzato $T = \frac{2\pi}{\beta}$, si viene a diminuire la sensibilità, data da $\frac{1}{\beta^2}$, ma si vede subito che la parte perturbatrice (secondo termine) al crescere di β tende più rapidamente a zero che non lo spostamento idealmente perfetto della massa (primo termine).

E continua: *nei sismografi, quando si vuole che la registrazione rappresenti il più fedelmente possibile l'andamento dell'accelerazione sismica, bisogna che il periodo proprio del sistema oscillante sia il più piccolo possibile.* È questa una prima condizione perchè nell'equazione differenziale due termini tendano a sparire, e l'accelerazione sismica divenga semplicemente proporzionale allo spostamento della massa inerte. Per rimediare alla già accennata difficoltà, che se si diminuisce il periodo proprio viene a diminuire la sensibilità, suggerisce di applicare un fortissimo ingrandimento. Termina facendo notare che i sismologi scelgono invece il periodo proprio dei sismografi molto grandi, per cui ottengono curve che non rappresentano nè lo spostamento, nè l'accelerazione.

In una terza e quarta Nota dal medesimo titolo ⁽¹⁾, l'autore dà il principio del nuovo strumento che deve realizzare le condizioni fondamentali di possedere lo smorzamento critico ed avere piccolo il periodo proprio per via del fortissimo ingrandimento. L'apparecchio, destinato ai soli macrosismi, è a liquido e si basa sull'effetto della pressione idrostatica dovuta all'inerzia. L'apparato inteso alla determinazione di una delle componenti orizzontali, consiste in un tubo orizzontale rigidamente collegato al suolo, tubo che termina da una parte e dall'altra in due sottili tubulature ad angolo retto. Esso contiene una colonna liquida imprigionata, la quale sotto gli impulsi del suolo in moto, imparte per inerzia un movimento di va e vieni alle due colonnine liquide verticali. Il sistema potrà portarsi allo smorzamento critico grazie alla possibilità di variare la lunghezza e quindi la resistenza al moto del liquido nei tubi capillari; il periodo proprio potrà portarsi ad essere il più piccolo possibile, essendo in facoltà dell'esperimentatore di aumentare il rapporto delle sezioni dei vasi comunicanti.

Per la determinazione della componente verticale, la colonna è in piedi, sostenuta dalla pressione di un gas racchiuso in apposito bulbo.

La quarta Nota rileva l'arbitrarietà ed i difetti delle scale sismiche in uso e torna a raccomandare gli accelerometri a liquido, i quali senza richiedere grandi mezzi e cognizioni speciali rendono possibile la determinazione dell'intensità di un terremoto in valore assoluto, mediante la relazione semplificata:

$$\Omega = \beta^2 a.$$

⁽¹⁾ Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fascicolo 10°, sec. sem. 1909 e vol. XIX, fasc. 1°, primo sem. 1910. Anche il Nuovo Cimento, vol. XVIII, fasc. 11° e 12°, 1909.

La Nota si chiude col dare le caratteristiche di alcuni modelli costruiti e coll'accennare che da zero a duecento unità c. g. s. la verifica sperimentale confermò le conclusioni teoriche.

2. L'oggetto della presente Nota è di discutere la teoria degli apparati sismici sopradescritti.

Il prof. Lo Surdo nel dare la teoria dei suoi apparecchi (per es. quello orizzontale della fig. 3^a, Rend. R. Acc. dei Lincei, Vol. XVIII fasc. 10 pag. 440) attribuisce alla pressione antagonista per lo spostamento unitario il valore $2n\sigma g$; fa eguale ad $L\sigma$ la massa per unità di sezione; dà eguale a $\frac{2ng}{L}$ la corrispondente accelerazione antagonista; assegna il valore

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2ng}}$$

al periodo proprio del sistema non smorzato e quello $\frac{L}{2g}$ alla sensibilità del sistema. L è la lunghezza del tubo orizzontale; n è il rapporto d'ingrandimento dei vasi comunicanti; σ è la densità del liquido. Infine, conforme al principio teorico che il periodo proprio del sistema oscillante non smorzato deve essere il più piccolo possibile, suggerisce di aumentare l'ingrandimento n , con che, secondo lui, *aumentando il rapporto delle sezioni, possiamo impicciolire il periodo senza diminuire la sensibilità.*

Vediamo se queste affermazioni sono esatte ed incominciamo dal valore del periodo proprio del sistema non smorzato.

Consideriamo l'apparato della detta fig. 3^a e scegliamo una posizione intermedia in cui il livello in ogni tubetto di sezione s disti di x dalla posizione di equilibrio. Il dislivello fra i tubetti sarà $2x$ e per uno spostamento infinitamente piccolo dx , la forza motrice $\sigma g s 2x$, compirà un lavoro $\sigma g s 2x dx$. A parte i vortici e la dissipazione nel cambiamento improvviso di sezione, l'equazione di continuità dice che $sV = Sv$, essendo v la velocità nel tubo orizzontale di sezione S , V quella nei tubetti di sezione s .

Sia H la distanza verticale dal centro di figura di detto tubo al menisco dei tubetti quando il liquido è in equilibrio statico. L'energia cinetica del sistema è

$$E = \frac{2Hs\sigma \cdot V^2}{2} + \frac{LS\sigma \cdot \frac{V^2}{n^2}}{2}$$

E se al tempo t una delle colonnine è cresciuta di x , e l'altra diminuita di altrettanto, l'energia potenziale è

$$U = \frac{H+x}{2} (H+x)s\sigma g + \frac{H-x}{2} (H-x)s\sigma g + U_0 = (H^2 + x^2)s\sigma g.$$

Applicando l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(2Hs\sigma + \frac{LS\sigma}{n^2} \right) V + 2xs \, g\sigma = 0,$$

e riducendo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{2g}{2H + \frac{L}{n}} x,$$

e quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g} + \frac{L}{2ng}}.$$

Paragonata quest'ultima formula con quella del prof. Lo Surdo vediamo che ne differisce pel termine sotto il radicale $\frac{H}{g}$.

Questo termine ha tutt'altro che una importanza secondaria, non potendo mai annullarsi completamente e precisando il periodo minimo sotto il quale non può discendere T per quanto grande diventi n . Dei due $\frac{H}{g}$ è il termine grande, $\frac{L}{2ng}$ è il termine piccolo, e se mai quest'ultimo era il termine che potevasi trascurare (¹).

Ciò dimostrato, richiamiamo il suggerimento caposaldo nel lavoro del prof. Lo Surdo che aumentando il rapporto delle sezioni si possa impieciolare a piacimento il periodo senza diminuire la sensibilità. Vedremo tosto che la diminuzione non è più di un ordine da corrispondere al suo scopo. Prendiamo ad es. tre apparecchi a tubo orizzontale aventi eguali dimensioni ($L = 49$ cm, e $2r = 3$ cm), e le sezioni dei tubetti così che nell'uno n valga 10 e negli altri 100 e 200. Le altezze dell'*acqua* nei tre apparecchi siano

(¹) Nel frattempo è apparsa nei Comptes Rendus, tom. 150, n. 7, pag. 363, 1910, una Nota del prof. Lippmann dal titolo: *sismographe à colonnes liquides*. Il principio teorico è ancora quello noto della possibilità di avere gli spostamenti rapidi del suolo quando il periodo proprio del sistema è il più grande possibile rispetto al periodo dei moti sismici. Per avere periodi grandi, suggerisce un apparecchio simile, ma inverso a quello del prof. Lo Surdo. Facendo grande la sezione dei tubi verticali e chiamandola S e facendo piccola quella s del tubo orizzontale, l'espressione $\frac{l}{2gn}$ si cambia in $\frac{ln}{2g}$; la quale spiega come i periodi possano diventare molto grandi fino a 141 sec. e più. Dei due termini sotto il radicale, che anche nel caso Lippmann entrano nell'espressione di T , è però $\frac{ln}{2g}$ il termine grande e $\frac{H}{g}$ il termine piccolo, per cui rispetto a quello, è lecito trascurare $\frac{H}{g}$; e così ha fatto il prof. Lippmann.

eguali. Per quanto cerchiamo di metterci nelle condizioni più favorevoli di un H molto piccolo, non potremo avere H guari più corto di 7 cm. altrimenti per poco che α sia superiore ai 0,03 cm., nel caso del maggior ingrandimento, la colonnina rientrerebbe nel tubo e con essa dell'aria. Secondo la formula del prof. Lo Surdo il periodo sarebbe di 0^s,3 quando l'ingrandimento è di 10, e 0^s,1 e 0^s,07 quando l'ingrandimento è rispettivamente di 100 e 200. Questo rapido decrescimento di T , che porta ad un rapido aumento di β , permetterà forse di trascurare il secondo termine dell'integrale generale (2). Però dalla mia formula il periodo viene da due a dieci volte tanto, precisamente di 0^s,6 coll'ingrandimento di 10 e 0^s,5₄ e 0^s,5₃ cogli ingrandimenti di 100 e 200. La riduzione del periodo al crescere dell'ingrandimento n , è poco sensibile. Fosse H eguale a 20 cm. i valori assoluti dei periodi (0^s,9₇; 0^s,9₂; 0^s,9₂) sarebbero notevolissimi, per nulla inferiori a quelli che assume il suolo scosso da terremoto (in generale non superiori ad 1 sec.) e il loro decremento sarebbe di appena 0^s,05! ⁽¹⁾.

Queste cifre calcolate vennero trovate in accordo con alcune determinazioni dirette del periodo d'oscillazione del liquido in un tubo ad U che aveva le costanti sopraindicate ed un ingrandimento di circa 228. Vero è che qui si aveva a fare con oscillazioni smorzate per via dell'attrito interno, però di una notevole influenza di esso attrito io non mi accorsi: con 18 cm. di acqua nei tubetti il liquido oscillava a 55° con periodo non gran che diverso da quello coll'acqua a 20°, quantunque l'attrito a freddo (0,01) fosse doppio dell'attrito a 55° (0,005).

Dopo ciò è quasi superfluo il dire che diminuendo di poco il T , crescerà di poco il β , per cui è da dubitare che il secondo termine della (2) sparisca, e quindi rimane pure dubbioso che lo spostamento α sia legato al valore dell'accelerazione dalla semplice relazione $\beta^2 \alpha = \Omega$.

Nemmeno la sensibilità (spostamento dei menischi nei rami verticali per unità di accelerazione) sarà indipendente da H . La teoria dice che per uno stesso spostamento della tavola oscillante, il fattore della sensibilità α diminuisce al crescere del periodo che assume il sistema ⁽²⁾; dovrà dunque diminuire al crescere di H .

(1) Che se poi gli stessi apparecchi conservano inalterata la massa d'acqua, nella supposizione che per l'ingrandimento 10, sia H eguale a 2 cm., vengono poi rispettivi ingrandimenti di 10, di 100 e di 200, tre periodi teorici eguali a 0^s,4; 0^s,9 1^s,3 ossia T anzichè diminuire al crescere dell'ingrandimento, andrebbe aumentando.

(2) Questa proposizione si dimostra graficamente descrivendo su due sistemi coordinati due curve $\alpha = f(t)$ di diverso periodo e sovrapponendo loro le curve integrali semplici e doppie: $\int \alpha dt$ e $\int dt \int \alpha dt$. La somma delle tre ordinate dà ad ogni istante lo spostamento x della tavola oscillante e si vede che nella curva a periodo maggiore, a parità di x corrispondono gli α minori.

Il citato professore dice che fino a 200 unità c. g. s. trovò buon accordo tra i valori di $\beta^2 a$ ed i valori dell'accelerazione sperimentalmente determinati alla tavola oscillante. Come si spiega quest'accordo se in via generale la relazione non è valida? Facciamo la congettura che ciò possa dipendere dalle condizioni casuali e speciali in cui avrà operato l'A. Vi è infatti un caso nel quale la relazione $\frac{2ng}{L}a = \Omega$ sembra avverarsi, ma non è quando per $\alpha = \beta$ il periodo proprio del sistema non smorzato è il più piccolo possibile, ma bensì quando detto periodo sta prossimo al periodo della tavola oscillante. La tabella seguente dà il risultato di alcune osservazioni provvisorie, secondo le quali, dando alla tavola un moto orizzontale di periodo eguale a quello proprio del liquido nel tubo e variando l'ampiezza di moto della tavola oscillante, la proposizione del prof. Lo Surdo circa vale.

Apparato orizzontale con ingrandimento di circa 228:

$H = 4^{\text{cm}},5$ $T_{\text{suolo}} = T_{\text{proprio del sistema non smorzato}} = 0^{\text{s}},4$ circa.

| x | $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ | $\frac{2g}{L} \cdot na$ | na |
|------------------|------------------------|-------------------------|------|
| cm. | | | cm. |
| 0.1 ₁ | 27 cm. gr. sec. | 29 cm. gr. sec. | 0.7 |
| 0.1 ₇ | 60 " | 63 " | 1.4 |
| 0.4 ₆ | 150 " | 125 " | 2.9 |

L'eguaglianza approssimata dei rispettivi valori di $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ e $\frac{2g}{L} na$ si può porre sotto la forma:

$$\frac{4\pi^2 x}{4\pi^2 \frac{2nH + L}{2ng}} = \frac{2g}{L} na$$

da cui

$$\frac{x}{a} = \frac{2nH + L}{L}$$

che dovrebbe fornire la spiegazione teorica del fatto. I moti del suolo e del sistema sono in opposizione e lo spostamento del suolo sta allo spostamento del liquido nel tubo nel rapporto delle inerzie per unità di sezione: la totale $2nH + L$ e la parziale L del tubo orizzontale.

Ma all'infuori di alcuni casi speciali, riteniamo che nel caso generale dei macrosismi che non hanno il periodo proprio dell'apparecchio, non sussista la relazione del prof. Lo Surdo. È piuttosto prevedibile che se il periodo del suolo sarà maggiore del periodo proprio del sistema, il metodo Lo Surdo

darà dei valori dell'accelerazione in eccesso ⁽¹⁾, se il periodo del suolo sarà minore di quello del sistema ed indurrà delle oscillazioni forzate, il metodo stesso darà dei dati in difetto. Eccone alcuni esempi ottenuti coll'apparato orizzontale con ingrandimento eguale a 228.

Per $H = 4$ cm.; T proprio $= 0^s,4$; T suolo $= 0^s,2$; per $x = 0^{cm},7$ viene Ω cinque volte maggiore dell' Ω dedotto dalla formola $\frac{2g}{L} na$. Per $H = 4^{cm},5$; T proprio $= 0^s,4$; T suolo $= 0^s,6$; per $x = 0^{cm},4_5$ viene Ω sperimentale metà dell' Ω dedotto dall'apparato e dalla relazione Lo Surdo. Per $H = 7$ cm.; T proprio $= 0^s,5$; T suolo $= 0^s,2$; per $x = 0^{cm},2$ viene l' Ω sperimentale nove volte maggiore dell' Ω ricavato dall'apparecchio.

Le altezze sono state scelte così da avvicinarsi alle condizioni di aperiodicità date dalla $\alpha = \beta$.

Geologia. — *Osservazioni morfologiche sull'alto bacino del Noce (Tirreno).* Nota del dott. R. ALMAGIA, presentata dal Socio G. DALLA VEDOVA.

Il tronco superiore della vallata del Noce, a monte di Trècchina, a chi lo abbracci tutto quanto dall'alto di uno dei monti che lo circondano, p. es. dalle vette del Sirino, sembra a primo aspetto un bacino chiuso. A nord lo rinsera la dorsale formata dalla Serra Malombra (1332 m.), dalla Rocca Rossa (1412 m.), dalla Serra della Secchia, dalla Serra dell'Alto (1207 m.) e dal M. Cervaro (1170 m.), ad est la cresta del Sirino (M. del Papa 2007 m.) con quella sua propaggine meridionale che forma la Costa della Neviera, poi la Serra Rotonda (1288 m.), il Castello di Starsia (1401 m.) il M. La Spina (1649 m.), i monti che recingono il Campo del Galdo (un bacino carsico di cui parleremo più avanti), la Serra del Monaco e la dorsale che termina col M. Messina (1027 m.); ad ovest la Serralunga (1483 m.), il M. Coccovello (1512 m.), la Serra della Grotta (1288 m.) e la Serra Pollino (1093 m.). Soltanto verso l'angolo sud il Noce si è aperto un passaggio tra i ripidi fianchi del M. Messina e la scoscesa parete della Serra Pollino, e, inoltrandosi in una gola angusta e selvaggia, esce in piano e si avvia verso il Tirreno. In altri tre punti la chiostra dei monti è poi profondamente intaccata: ad ovest nella sella Vascelli (632 m.) a nord del M. Coccovello, per cui passa la strada nazionale Lagonegro-Sapri, più a sud nel passo della Colla (605 m.) tra il M. Coccovello e la Serra della Grotta, per cui passa

(¹) L'espressione $\frac{2g}{L} na$ diminuisce al crescere di T perchè na si fa piccolo, ma l'altra espressione $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ diminuisce più rapidamente per via del T quadrato al denominatore.

la strada Trecchina-Maratea; ad est nella sella detta il Cavallo (840 m.) tra Noce e Sinni, attraversata dalla strada Lagonegro-Latronico; a queste potrebbe aggiungersi anche, all'estremo nord-ovest, l'intaccatura a sud del M. Cervaro, sullo spartiacque tra Noce e Bussento (778 m.), pure valicata da una strada rotabile.

L'aspetto di bacino chiuso che la vallata presenta è in relazione con un fatto importante della sua recente storia geologica: che cioè, come risulta dalle ricerche di G. De Lorenzo, cui si debbono i migliori studi sulla geologia di questa regione, il fondo della valle stessa fu già occupato da un lago quaternario ⁽¹⁾. Questo lago — del quale oggi rimangono scarse tracce consistenti in letti isolati di ghiaie con sabbie ed argille ⁽²⁾ e anche in brevi e mal definiti terrazzi — si estendeva a sud, battendo alle falde del Coccovello, fino a Trecchina, a sud-est fino ai piedi della rupe di Lauria, ad est fino al piede degli ultimi sproni del Sirino sovrastanti a Nemoli. Esso si vuotò quando la erosione delle acque scavò la su mentovata gola tra la Serra Pollino e il M. Messina; il tronco inferiore del Noce servì da emissario.

L'alto bacino del Noce offre un interessante campo di studi così al geologo, per la grande varietà delle formazioni che vi appaiono e per i complessi problemi tettonici che esse presentano, come anche al geografo, poichè si presta come poche altre a indagare l'influenza molteplice e varia degli agenti esterni nel modellamento delle forme superficiali. Scopo di questa Nota è di illustrare brevemente proprio quest'ultimo punto, additando i fattori che nel più recente passato si esercitarono e tuttora si esercitano a modificare la plastica del suolo conferendole aspetti caratteristici; in particolare richiameremo l'attenzione su una speciale categoria di tali fattori, finora meno considerata, e pur importantissima nei suoi effetti svariati e lontani.

Della geologia della regione basterà perciò un assai breve accenno ⁽³⁾. Le zone più elevate e le vette dei monti sono in generale costituite da calcari secondari, più o meno compatti, talora dolomitici, o anche da dolomia pura. Calcari cretacei e liasici, talvolta imbasati sulla dolomia principale (M. Cervaro, M. Rotondo), costituiscono tutta la dorsale che limita ad ovest il bacino, raggiungendo una potenza enorme nel massiccio cretaceo del Coccovello; calcari pure cretacei s'incontrano, in pile di gran spessore, a sud, nel M. Messina e nelle Sierre Nocara, Dieco, Pastorella e Rotonda, mentre il gruppo della Spina è formato da dolomia, come i monti a sud di Trecchina, nei quali essa sostiene i calcari giuraliasici (Serre La Grotta e Parruta);

⁽¹⁾ Cfr. De Lorenzo G. *Studi di geologia nell'Appennino meridionale*, in Atti della R. Accad. di Sc. fis. e matem. di Napoli, ser. II, vol. VIII, pp. 118-120.

⁽²⁾ Il lembo più esteso che io abbia osservato è quello su cui è costruito il paese di Trecchina.

⁽³⁾ Esso è condotto in base alle indicazioni del f. 210 della carta geologica al 100.000 (1908) e ad osservazioni personali.

infine calcari compattissimi del trias costituiscono gran parte dei gruppi del Sirino, del Papa, della Serra Malombra, della Rocca Rossa ecc.; la dolomia riappare nei monti a nord di Lagonegro (M. Nicola, Serra dell'Alto, Serra Pertusata). Ma nella Montagna del Sirino e nei gruppi vicini (Serra Malombra, M. Lofarno) appaiono largamente diffusi, di solito nelle zone meno elevate, anche scisti triasici policromi con noduli di selce; questi s'incontrano eziandio in strati molto spessi e con vivaci gradazioni di colore — dal rosso al verde dal giallo all'azzurro — nelle colline a nord di Lagonegro, nei monti Gurmara, Milego ecc. Il fondo delle vallate, così lungo il Noce, come lungo i principali affluenti, è invece costituito da formazioni eoceniche che ricuoprono i calcari di ogni età: esse consistono principalmente in scisti argillosi ed argille variegata e scagliose. Lungo le valli trasversali queste formazioni risalgono fino a notevoli altezze, anzi in corrispondenza alle quattro intaccature della chiostra montuosa dianzi accennate, esse giungono fino a costituire la zona spartiacque; in particolare è da notare che ad est, tra la Serra Orticoso, propaggine meridionale del M. Papa, e la Serra Rotonda, la dorsale spartiacque tra Sinni e Noce, per la lunghezza di circa 5 chilometri, è costituita esclusivamente da queste formazioni argilloscistose dell'eocene.

I principali processi che in un passato recente hanno lavorato a determinare l'attuale morfologia della regione, ed in parte ancora lavorano energicamente a modificarla, si possono raccogliere sotto tre categorie.

I. Nelle zone più elevate, per lo meno nel gruppo del Sirino, a determinare l'attuale plastica del suolo hanno contribuito fenomeni glaciali. La larga vallata ad U che si apre sul fianco settentrionale del M. Papa ad est della Spalla dell'Imperatrice, fu certamente modellata e forse anco scavata da un assai notevole ghiacciaio, le cui tracce ci son date oggi dalla morena terminale che, all'altezza di circa 1500 m., sbarra la valle in forma di morbide collinette distese per una larghezza di 400 m.; a tale sbarramento si deve l'origine del lago Remmo, piccolo bacino di forma regolarmente ovale, all'altezza di 1517 m. Anche la contigua Valle del Cacciatore, ad ovest della Spalla dell'Imperatrice, fu occupata e quindi modellata da un ghiacciaio poco meno esteso in lunghezza del precedente, la cui morena terminale appare in forma di un cordone detritico lungo un chilometro e mezzo e largo un centinaio di metri; anche qui lo sbarramento di una vallecola laterale ha dato origine ad un laghetto (L. Zapàno). Un più breve ghiacciaio occupava un altro vallone sul fianco meridionale del M. Papa, che presenta pure il caratteristico profilo ad U; altre tracce glaciali (ciottoli striati, lembi morenici ecc.) s'incontrano in più luoghi nel gruppo del Sirino ⁽¹⁾.

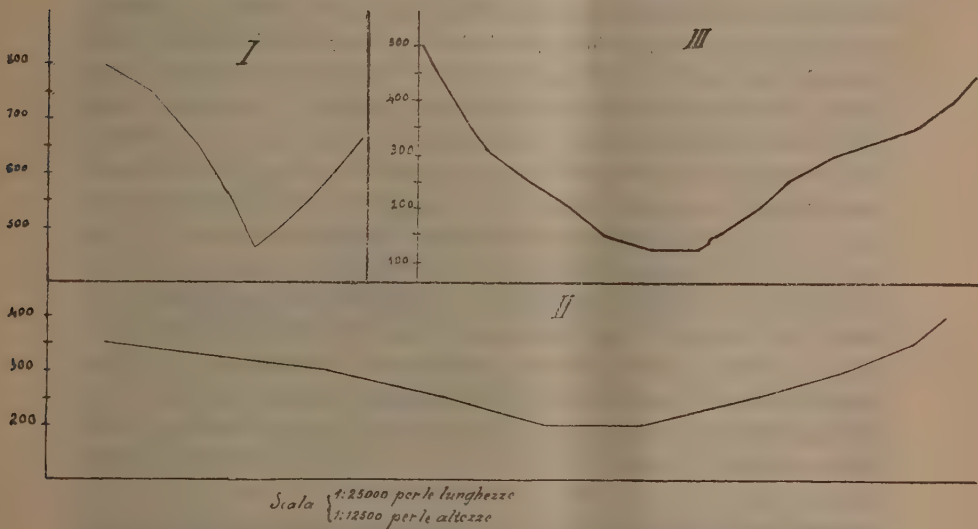
⁽¹⁾ Cfr. De Lorenzo G., *Avanzi morenici di un antico ghiacciaio del Monte Sirino nei dintorni di Lagonegro*, Rend. Accad. Lincei, Cl. di sc. fis., 1892, II sem., pp. 348-358; *Il postpliocene morenico del gruppo montuoso del Sirino in Basilicata*, id. id., 1898, II sem. pp. 317-20.

II. Se il fenomeno glaciale ha avuto azione ristretta e forse limitata alla zona del Sirino superiore a 1500 m., più largamente diffusi appaiono, nel dominio delle formazioni calcaree, i fenomeni carsici. L'erosione meccanico-chimica delle acque sui fianchi ripidi dei monti calcarei, ha spesso avuto come risultato di foggjar questi in forme molto regolari di coni, talora a cima tronca: caratteristici il M. Cervaro, il M. Arenazzo e il M. Rotondo a NO di Lagonegro; la Serra Rotonda, isolata appendice della Serralunga e soprattutto il regolarissimo e imponente cono, pur detto Serra Rotonda, a NE di Lauria; oltremodo caratteristico il M. Coccovello, altro cono enorme a base ellittica, con la sommità mozzata, terminante cioè con un piano inclinato da sud a nord. Le doline, localmente indicate col nome generico di *fosse*, sono frequenti: tutto sfioracchiato ne è l'ora detto piano che forma la vetta del Coccovello, chiamato appunto *Piano delle Fosse*; una più grande dolina si osserva alle sue falde meridionali, poco ad ovest del Passo della Colla, e altre sparse sui monti a sud di Lauria. A fenomeni carsici si ricollega poi certamente l'origine di quattro più estese cavità, tutte occupate probabilmente un tempo da laghi, ora, salvo una, asciutte in tempi normali. Esse sono: il Lago della Rotonda, il Campo del Galdo, l'Uovo di Vacca ed il Lago Sirino.

Il lago della Rotonda è una conca di forma ovale, lunga circa 1900 m., larga in media un po' meno di 500, posta proprio allo spartiacque tra Noce e Sinni, fra la Serra Rotonda, la Serra di Tornesiello e il Castello di Starisia; il fondo è leggermente inclinato da SO a NE, e non lungi dall'angolo orientale si ha la massima depressione, 907 m.; a nord evvi una slabbratura, ove l'orlo della conca è alto appena una quindicina di metri sul fondo; oltrepassandolo, si scende verso il Sinni. All'epoca della mia visita (28 agosto 1908) il lago era interamente asciutto ed in gran parte coltivato a granturco e legumi; ma nelle parti più basse eran evidenti tracce di acqua da poco scomparsa; seppi infatti che l'acqua vi stagna normalmente nell'inverno e non se ne va che nella tarda primavera; cavità aperte nel fondo che l'assorbano, peraltro non appaiono. È probabile che le acque assorbite vadano sotterraneamente ad alimentare il Sinni, il cui alveo è circa 180 m. più basse del fondo del lago. Varcato l'orlo SO, alto circa 950 m., s'incontra una tipica dolina ellissoidale a fondo piatto col diametro maggiore lungo circa 60-65 m. (da ESE a ONO); essa si appoggia a SE alla ripida pendice della vetta segnata m. 1016 sulla carta; dalle altre parti è circondata da un orlo alto 9-12 m.; il fondo è a circa 935 m. (aneroide).

Il Campo del Galdo a SE di Lauria (spartiacque Noce-Lao), chiuso tra la Sierra di Dieco, il M. la Spina e la Serra Grande, è alquanto più vasto: misura infatti oltre 3 km. in lunghezza con una larghezza media di circa 600 m. In origine però era molto più largo ed aveva forma presso che triangolare, ma oggi esso è invaso sul lato nord da una tipica conoide di deie-

zione, formata da due torrenti, il Vallone del Salice e l'Acqua Siccaro ⁽¹⁾ che scendono dal M. La Spina. Asciutti interamente all'epoca della mia visita (30 agosto 1908), essi convogliano d'inverno, nei loro larghi letti ciottolosi, poca acqua che si raccoglie nella parte più bassa del Campo detta *Il Pantano* (705 m.). Anche in questa parte però la conca era di agosto tutta a secco e coltivata; l'acqua si doveva trovare tuttavia a piccola profondità sotto il fondo (non più di 2-3 m.) come dimostrò l'ispezione di alcuni pozzi verso il lato NO. Quivi — proprio all'angolo NO — una soglia



Tre sezioni trasversali della Valle del Noce. — I. Al piede della Serra Nucitu: ambo i versanti sono incisi nelle formazioni calcaree. — II. Poco a valle del confluyente col Torbido: ambo i versanti sono incisi nelle formazioni argillose e franose dell'eocene. — III. Poco prima dell'imbocco della gola di Trecchina: il versante sinistro, più ripido, è costituito da calcare; sul destro, alquanto più sdraiato, il calcare è ricoperto in basso da una sottile coltre argillosa.

alta 744 m. (aner.) separa il Campo dalla vallecola di un fosso che affluisce al Caffaro (Gaglione, Noce) e qui passa la strada nazionale che traversa tutto il Campo, risalendo anche la conoide. E difficile dire se le acque assorbite dal fondo, tributino al Noce, ovvero ai torrenti che formano il Lao, ma la prima ipotesi è da ritenersi, per ragioni stratigrafiche, più probabile.

La cavità che porta il caratteristico nome di Uovo di Vacca è a SO del Campo del Galdo da cui la separa la dorsale della Serra Grande. Il fondo,

(¹) I due nomi dei torrenti mancano nella carta topografica (f. 210, II).

di forma presso che circolare, col diametro di 500-600 m., è all'altezza di circa 925 m.; circondata da ogni parte da pareti erte e ripide, la cavità è aperta solo verso NE, dove la limita un orlo alto appena 12-14 m., superato il quale, si scende in un vallone inciso nei fianchi della Serra, che va a finire nel Campo del Galdo. Il fondo della cavità è, anche d'inverno, ordinariamente asciutto, poichè l'acqua piovana viene immediatamente assorbita; vi sono anche alcuni fabbricati.

Il lago Sirino si trova al piede meridionale della montagna omonima, sulla sinistra della strada che conduce da Lagonegro a Lauria, a 784 m., di altezza (aner.). Il piccolo bacino di forma ellittica un po' irregolare, lungo circa 250 m., largo al massimo la metà, si apre nelle formazioni argillo-scistose dell'eocene che rivestono con sottile mantello i sovrastanti calcari triasici della Costa del Capraro o Mazzapecore. Alimentato da un breve e limpido ruscello, che si dilata e impaluda prima di raggiungere il lago, questo è privo di emissario visibile; uno smaltitoio si aprì veramente all'improvviso nell'autunno 1903 all'angolo SE per lo sprofondamento di un tratto della riva e la conseguente formazione di un piccolo pozzo naturale nel quale le acque si inabissavano; esso peraltro fu poscia ostruito artificialmente con pietre. Oggi dunque il lago viene smaltito per via sotterranea, e non è improbabile che le acque alimentino qualche sorgente dei dintorni, forse quelle della Ferriera di Nemoli, come è opinione della gente del luogo. Il livello del lago, che all'epoca della mia visita (27 agosto 1908) era presso che in massima magra, è soggetto durante l'anno ad oscillazioni di un metro e forse più, come si rileva da tracce ben visibili sulle rive; non mi fu possibile di conoscere la profondità che peraltro non deve essere considerevole. La temperatura dell'acqua era il 27 agosto alle 9 del mattino 10°,6 (all'ombra), essendo quella dell'aria 19°,3; il colore verdastro. Il lago alberga molto pesce.

III. Nelle zone più basse della regione considerata, occupate dalle formazioni a base argillosa dell'eocene, la plastica del suolo è determinata principalmente da quelle forme accelerate e intensificate dei processi denudatori, che si possono abbracciare col nome generico di frane; ad esse si associa l'opera dell'erosione, pur esercitantesi spesso in forma accelerata ⁽¹⁾. Nelle pendici che scendono ai corsi d'acqua, il terreno è quasi ovunque in-

(¹) La nomenclatura italiana dei vari processi di demolizione è ancora alquanto incerta. Qui, sull'esempio di alcuni più recenti scrittori tedeschi, noi adoperiamo il vocabolo *erosione* per indicare genericamente tutti i processi che agiscono in senso lineare, e il vocabolo *denudazione* per designare quelli che si esercitano di preferenza in superficie. Veramente per questi ultimi è in uso in tedesco, accanto alla voce « denudazione » (o il corrispondente germanico *Entblössung*), la voce *Abtragung* che potrebbe tradursi con *asportazione*; ma noi abbiamo voluto evitare di aggiungere un altro neologismo ai tanti già introdotti in questo campo, e più o meno generalmente accolti.

stabile o semovente ⁽¹⁾; il tipo di frane che predomina è quello di scorri-menti, estesi, ma di solito poco profondi, della crosta argillosa, che, fessu-randosi d'estate per azione del calore solare, s'impregna poi d'acqua nella stagione umida e scivola per l'aumento di peso e per l'impulso dell'acqua stessa. Fenomeni di questo genere io ho osservato in forma cospicua lungo il Vallone Bitonto, i cui fianchi si convertono d'inverno in un vero mare di viscida fanghiglia semovente, lungo il Vallone Lupo, e sulla destra del Ga-glione; gli abitanti danno il nome di *calanche* o *sciòddole* alle frane di questo tipo. Dove il terriccio coltivato ricuopre le argille, i movimenti si verificano ugualmente, perchè l'acqua penetra sotto l'*humus*, scorre sulle ar-gille sottostanti e le rammollisce, finchè esse, quando l'inclinazione del pendio sia sufficiente, per la pressione del terreno sovrapposto si mettono in moto cercando una nuova posizione di equilibrio. Nelle pendici coperte di bosco, gli scorrimenti, in genere più profondi, sono lentissimi, talora impercettibili: si rivelano peraltro dalla posizione inclinata degli alberi, come appare nel Bosco di S. Maria sulla sinistra del Torbido.

Non mancano poi esempi di frane più grandiose: scoscendimenti improv-visi di potenti zolle di argilloscisti, come quello imponente che accadde nel dicembre 1878 in contrada Rosa alle sorgenti del Torbido, o lenti scorri-menti di tutta intera la coltre argillosa sul letto calcareo soggiacente, come si verifica a Lauria, sulla sinistra del Gaglione. Quivi appunto, tutta la falda, spesso certamente molte diecine di metri, che ricuopre gli strati di calcare cretaceo della Serra Pastorella e della Serra S. Elia, è impegnata in un lento, ma continuo sdruciolamento verso il Gaglione: le case più basse di Lauria Inferiore e buona parte di Lauria Superiore vengono travolte nel mo-vimento, facilitato da acque filtranti, che probabilmente formano un velo fra le argille e i calcari. Anche il ciglione dirupato e in più luoghi a picco della Serra Pastorella, dove il calcare è fessurato e cariato, è compromesso nel movimento: a Lauria Superiore più volte (p. es. nel 1740 e nel 1826) il crollo di una parte dello sprone che sosteneva le case del rione Olmo, recò gravissimi danni.

Gli effetti morfologici delle frane si rivelano sia nel modellamento delle valli, sia nella conformazione dei dossi montuosi, dove questi sono co-stituiti esclusivamente dalle formazioni argillose, sede delle frane stesse. In generale la rapida denudazione sui fianchi delle valli conferisce ad esse un aspetto più maturo di quello che dovrebbero avere, accelerandone il ciclo evolutivo; il profilo trasversale appare piatto e sdraiato, perchè l'inclina-zione delle pendici laterali è piccola e il fondo largo. Nella valle del Noce, che è ancora allo stadio di giovinezza, caratterizzato di solito da un profilo

(¹) Cfr. Bruno G. B., *Le frane di Lauria*. L'ingegneria civile e le arti industriali, 1891, pp. 49-59.

trasversale a forma spiccata di V, si alternano invece ai tronchi con tale profilo, tronchi con profilo molto più sdraiato; questi ultimi corrispondono all'attraversamento dei terreni franosi dell'eocene. Angusta e incassata fin sotto la Serra Nucitu a sud di Lagonegro (cfr. la sezione I), la valle si apre e si allarga poi in corrispondenza ai confluenti del Vallone Lupo e del Bitonto, riprende il caratteristico profilo trasversale a V nei dintorni di Rivello, ove i suoi fianchi sono costituiti da formazioni calcaree solo in parte rivestite da una sottile coltre argillosa, poi si allarga nuovamente, assumendo un profilo assai piatto, tra il confluente della Fiumara del Bosco e quello del Gaglione, nel tronco cioè dove le frane hanno il massimo sviluppo (sez. II), infine si restringe ancora presso la gola di Trècchina (sez. III).

L'influenza dei processi denudatori nel modellamento dei dossi montuosi appare manifesta nei dintorni del Passo della Colla e soprattutto nella regione detta « Il Cavallo » tra Sinni e Noce, dove le formazioni argillose si estendono, come già si disse, fino a costituire per lungo tratto la linea di displuvio. Qui i movimenti del suolo agiscono appunto nel senso di arrotondare ed abbassare le dorsali spartiacque, e ad essi si associa l'erosione regressiva dei torrenti, pure esercitantesi in forma accelerata, data la piccola resistenza dei terreni superficiali. La già ricordata frana in contrada Rosa si staccò proprio presso lo spartiacque Noce-Sinni, che qui è alto 1022 m. circa; ma il torrente Torbido, guadagnando a ritroso, tende ad intaccarlo ed abbassarlo vieppiù. Più energicamente lavorano allo stesso effetto i piccoli corsi d'acqua formanti il Gaglione, la cui erosione regressiva si esercita proprio nel punto dove lo spartiacque è più depresso (840 m.); quivi le sorgenti del vallone Alzo Jornillo, uno dei due rami principali del Gaglione, distano appena un chilometro dal letto del Sinni; è perciò assai probabile, come ha già segnalato il De Lorenzo ⁽¹⁾ la decapitazione del Sinni stesso, che qui corre all'altezza di 780 m. circa, da parte del Gaglione, il cui alveo nel punto di riunione dei due valloni che lo formano, è invece a 420 m. ⁽²⁾; è un caso di cattura facilmente prevedibile per un avvenire relativamente vicino.

All'erosione regressiva si deve del pari l'arretramento delle tre vallette di Mala Mogliera, del Lupo e del Vallone Grande, cui corrispondono tre intaccature della linea displuviale; il torrente Lupo è particolarmente attivo, poichè anche qui all'opera dell'erosione si aggiunge quella delle frane nella coltre argillosa che forma la dorsale spartiacque.

Lo studio delle condizioni morfologiche dell'alto bacino del Noce non è senza importanza nei riguardi antropogeografici, specialmente per ciò che riflette l'azione delle frane e fenomeni affini sulla viabilità, sulle culture,

(¹) Gfr. De Lorenzo, *Studi di geol. nell'App. merid.*, pag. 121.

(²) L'alveo del Noce, che pel Gaglione rappresenta il livello di base dell'erosione, si trova, alla confluenza col Gaglione stesso, a 180 m. s. liv. mar.

sulla sicurezza degli abitati. Qui basti accennare alla grande instabilità delle strade: quella da Lagonegro a Lauria, più volte spostata e danneggiata, ha dovuto subire un gran numero di varianti, al pari del tronco Lauria-Trecchina; della strada rotabile che univa Nemoli alla nazionale per Sapri e di quella da Trecchina a Rivello oggi non resta quasi più traccia. Quanto agli abitati, si è già fatto parola delle condizioni precarie in cui versano le due Laurie. In tal modo le rapide mutazioni nella plastica del suolo si rendono manifeste anche per le conseguenze indirette che riguardano l'uomo; più esattamente potrebbero accertarsi tali mutazioni se si possedessero carte topografiche di quattro o cinque secoli fa da paragonare con le attuali; si traccerebbe allora la storia morfologica della regione e si avrebbe modo di valutare la somma di lavoro compiuto in un dato tempo dagli agenti modificatori di cui si è discusso; valutazione che pur sarebbe di grande interesse ma che attualmente riesce presso che impossibile.

Mineralogia. — *L'andalusite di Musso (Lago di Como)* ⁽¹⁾.

Nota del dott. EMILIO REPOSSI, presentata dal Corrispondente ETTORE ARTINI.

I gneiss minuti ed i micascisti, a volta a volta granatiferi e staurolitiferi, con intercalazioni anfibolitiche, noti nella letteratura col nome di *micascisti del Legnone*, si stendono con pari potenza anche sulla sponda destra del lago di Como, affiorando dai dintorni di Rezzonico fin sopra Gravedona e formando la massa principale del Bregagno. In essi si notano assai di frequente lenticciole e straterelli quarzosi bianchi, qualche volta leggerissimamente rosei o violacei, spesso arricciati, sempre in perfetta concordanza con le rocce finalmente scistose e quasi filladiche che li includono. In qualche punto queste lenti quarzose raggiungono la potenza di due, tre ed anche quattro decimetri, come ad esempio nelle adiacenze di Musso, ed allora vengono talvolta utilizzate come fondente nelle vicine ferriere di Dongo.

Presso Musso appunto, ossia poche decine di metri più a sud della nota lente calcareo-marmorea sulla quale sono gli avanzi del castello che da questo borgo prende nome, e precisamente nelle immediate vicinanze della frazione di Genico, ad un centinaio di metri sul lago, in una di quelle lenti quarzose ed in un blocco da esse staccato rinvenni i cristalli d'*andalusite*, che formano oggetto della presente Nota. Essi sono adunque in condizioni di giacitura affatto normali e pressochè identiche a quelle dell'Alpe Lisens e di Pitzthal nel Tirolo, di Montavon nel Vorarlberg, della val Fluela e del ghiacciaio di Scaletta nei Grigioni, e di molte e molte altre località ancora, ma

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio mineralogico del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

hanno per noi un singolare interesse perchè sono i primi che si rinvennero, almeno per quanto io so, in simili condizioni in territorio italiano.

A somiglianza degli esemplari delle località ora ricordate, delle quali si occuparono molti studiosi, ed in ispecial modo il v. Zepharovich ⁽¹⁾, l'Haefele ⁽²⁾, il Rompel ⁽³⁾, il Gemböck ⁽⁴⁾, il Gramann ⁽⁵⁾, i cristalli di *andalusite* di Musso, quantunque sempre e interamente compresi entro il quarzo, sembrano talvolta impiantati nella roccia che interclude il quarzo stesso, roccia che, nel caso particolare del quarzo andalusitifero di Genico, è precisamente un gneiss a due miche, ricco di cristalli di staurolite grossi e ben formati. È da notarsi che in questo gneiss non ho constatata la presenza dell'andalusite; la qual cosa trova perfetto riscontro in quanto osservarono altri autori in giacimenti analoghi, come ad esempio a Lisens, nella Pitzthal, ecc.

Le lenti quarzose, con o senza andalusite, sono rivestite da una specie di corteccia micacea, in cui spesso la biotite è alterata in clorite, e sulla loro superficie sono talvolta adagiati cristalli di staurolite, ma nella loro massa, almeno nei casi da me osservati, non sono compresi, oltre i cristalli d'andalusite, ed anche questi sventuratamente assai rari, che i suoi prodotti d'alterazione, piccole quantità di sillimanite e lamine o leccature muscovitiche. Sotto questo riguardo pertanto le lenti andalusitifere di Musso si differenziano abbastanza marcatamente da quelle più sopra citate, nelle quali l'aspetto può dirsi con ragione quasi pegmatitico perchè l'andalusite vi è spesso accompagnata da felspati, da miche, da cordierite, da cianite e da altri minerali ancora.

I cristalli d'*andalusite* da me raccolti, pur essendo di norma allungati secondo *z.* sono qualche volta anche piuttosto tozzi. Gli individui più grossi raggiungono 7-8 cm. di lunghezza, sopra 4 cm. circa di spessore: si tratta quindi di esemplari abbastanza vistosi e paragonabili, ad esempio, agli esemplari provenienti dall'Alpe Lisens, ai quali invero assomigliano mirabilmente anche per tutti gli altri caratteri.

I cristalli, che si liberano facilmente dalla matrice quarzosa, in grazia di una spalmatura muscovitica dalla quale sono quasi completamente rive-

⁽¹⁾ V. v. Zepharovich, *Mineralogisches Lexicon f. d. Kaiserthum Oesterreich*, 1859, I, pag. 14; 1873, II, pag. 12.

⁽²⁾ P. E. Haefele, *Ueber Andalusit vom Pitzthale in Tirol*, Zeitschr. f. Krystall. u. Miner.; B. XXIII, pag. 551, 1894.

⁽³⁾ J. Rompel, *Ein neuer Fundort für Andalusit auf der Heimspitze in Vorarlberg*, Tschermin. mineral. u. petrogr. Mittheil.; B. XIV, 1894.

⁽⁴⁾ H. Gemböck, *Ueber den Andalusit vom Montavon in Vorarlberg*, N. Jahrbuch f. Mineralogie, etc. 1898, II, B. 89.

⁽⁵⁾ A. Gramann, *Ueber die Andalusitvorkommnisse in rhätischen Flüela- und Sceltagebiet und die Färbung der alpinen Andalusite*, Vierteljahrsschrift d. Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, XLIV Jg. 1899.

stiti, sono poveri di forme e, ad ogni modo, tali da non prestarsi affatto a misura goniometrica precisa. Le facce sono quasi opache, solcate ed ondulate e spesso tutto il cristallo sembra essere stato contorto e deformato da una energica pressione. Qualche imperfettissima misura, eseguita col goniometro d'applicazione, permise di riscontrare il solito prisma {110}, secondo il quale i cristalli hanno anche una sfaldatura abbastanza facile, sebbene poco perfetta, la base {001} e, dubitativamente, il prisma {101}.

Negli esemplari freschi e sulle superficie di frattura che interessano le parti più interne dei cristalli il colore è rosa fior di pesco o rosso carmino e la lucentezza vitrea molto viva; di solito però i cristalli sono superficialmente alterati, ed in tal caso il loro colore varia dal giallo-verdastro al grigio-verdastro od azzurrastrò con macchie giallo-brune e la lucentezza diventa piuttosto grassa. In nessuno osservai traccia di zonature, che ricordino quelle tipiche della chiastolite.

Nelle parti più fresche, ossia verso il nucleo degli individui cristallini, dove il colore è più vivo, la durezza supera il 7, mentre scende gradatamente fino sotto il 3 nelle parti alterate di aspetto quasi talcoso.

Il peso specifico, determinato sopra frammentini accuratamente scelti fra i più puri ed i più freschi, risultò uguale a 3,144 (determinazione fatta con la soluzione di Klein e la bilancia di Westphal, a 20° C.).

Gli individui molto alterati sono quasi opachi, mentre gli altri sono sensibilmente più trasparenti e mostrano, ridotti in frantumi, l'ordinario pleocroismo dell'andalusite

$a = c$ incolore o leggermente verdognolo

$b = b$ " " "

$c = a$ rosa pesco.

Sopra qualche laminetta basale, distinguibile per la mancanza pressochè completa di pleocroismo, si potè osservare a luce convergente una discreta immagine assiale, con un angolo degli assi ottici piuttosto grande.

I cristalli studiati sono, come ora dissi, quasi costantemente alterati verso la superficie in una massa d'aspetto talcoso, verdastra, compatta, ma poco dura. L'alterazione si stende anche lungo le non rare screpolature dei cristalli e qui talvolta si presenta come una spalmatura biancastra o bianco perlacea ancor più tenera e quasi terrosa, che si riga facilmente con l'unghia ed è untuosa al tatto.

Tanto l'uno quanto l'altro di questi prodotti d'alterazione si risolvono al microscopio in un aggregato di squamette vivamente birifrangenti, che hanno tutti i caratteri della serieite. Si può quindi ritenere che, non ostante il loro diverso aspetto, essi si siano originati per un identico processo d'alterazione.

È noto che simili prodotti d'alterazione furono riscontrati, si può dire, quasi dovunque sui cristalli d'andalusite e dai varî osservatori diversamente

interpretati. L'opinione in oggi comunemente accettata è che si tratti di una vera sericitizzazione, accompagnata forse da formazione di un po' di caolino e di clorite.

Altro fatto molto frequentemente osservato è la presenza di lamelle muscovitiche adagiate regolarmente sui cristalli d'andalusite, lamelle che talvolta ricoprono interamente le facce del cristallo e non di rado si addentrano nelle screpolature, adattandosi con molta regolarità sulle superficie di sfaldatura. Una disposizione consimile si nota su quasi tutti gli esemplari da me raccolti a Musso.

Questa muscovite venne dai più ritenuta come un prodotto d'alterazione dell'andalusite e precisamente come il risultato di un più avanzato stadio del processo di sericitizzazione, al quale or ora accennammo. Senonchè alcuni autori, e specialmente il Gümbel ⁽¹⁾, l'Haefele ⁽²⁾ nel suo studio sull'andalusite di Pitzthal nel Tirolo, sulle tracce del De Cloizeaux ⁽³⁾, del Delesse ⁽⁴⁾ e del Roth ⁽⁵⁾, opinano che tale muscovite in più grandi lamine sia un primitivo intercluso delle lenti quarzose concresciuto ed associato all'andalusite, cosa che, in alcuni casi particolari, è probabilmente vera.

Il Gramann invece, il quale, occupandosi dell'andalusite di numerose località dei Grigioni, fu uno degli ultimi autori che abbiano studiato questo minerale in giacimento analogo al nostro, ritiene che il caso generale sia quello da noi accennato, e cioè che la muscovite in lamine macroscopiche sia davvero prodotta di una più avanzata alterazione dell'andalusite.

Dal canto mio dirò che quanto s'osserva nel giacimento di Musso depone piuttosto in favore di questa che dell'altra ipotesi. Difatti fra gli esemplari da me raccolti ve n'ha qualcuno che ha l'estremità completamente formata da muscovite e qualche altro è con tutta sicurezza una completa pseudomorfo di muscovite su andalusite, trattandosi di un aggregato di pure lamine micacee ripetente esattamente la forma esterna di un cristallo di quest'ultimo minerale. Altro fatto degno di nota è che, mentre la muscovite staccata dai cristalli d'andalusite, e proveniente dunque, secondo me, dalla loro alterazione, ha tutti e sempre i caratteri di una muscovite normale, con un angolo assiale piuttosto grande, la mica, che in alcune lenti quarzose, andalusitifere o no, mi fu dato riscontrare in leccature o straterelli di un'origine certamente diversa, ha spesso un angolo assiale piccolissimo ed in taluni casi è quasi affatto uniassica.

(1) Gümbel, *Geognostische Beschreibung des ostbayerischen Grenzgebirges*, etc., Gotha, 1868.

(2) Memoria citata.

(3) Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, 1862, vol. I, pag. 175.

(4) Delesse, *Bulletin de la Société géologique*, 1859, vol. XV, pag. 141.

(5) J. Roth, *Allgemeine u. chemische Geologie*, Berlin 1879, B. I, 375.

A conclusioni diverse giungerei invece riguardo alla *sillimanite*, che, come sopra ho detto, accompagna qualche volta l'andalusite di Musso, formando un nuovo esempio di questa interessante associazione fra le due specie minerali.

Frantumando ed osservando al microscopio la parte alterata e tenera dei cristalli d'andalusite, insieme con gli aggregati squamosi sericitici, si notano qualche volta sottili aghetti con allungamento positivo ed estinzione parallela, che facilmente si riconoscono per sillimanite, tanto che, ad un primo esame, si potrebbe pensare ad una paramorfosi di questo minerale su andalusite. Insieme però potei osservare che taluni cristalli freschi sono qua e colà ricoperti regolarmente da aghi di sillimanite in quantità abbastanza grande per essere perfettamente riconoscibile ad occhio nudo, e che non di rado la sillimanite si trova anche isolatamente racchiusa entro il quarzo. Ciò mi pare ragionevolmente escludere che si tratti di una paramorfosi, e provare che ci troviamo dinanzi ad un'associazione primitiva dei due minerali, simile forse a quelle regolari, che per primo osservò il Lacroix ⁽¹⁾ in alcuni esemplari di Ceylan, di Bretagna e dei Pirenei, e che poi furono da altri pure riscontrate.

Chimica. — *Sopra un tentativo di preparazione dei composti ossigenati del fluoro* ⁽²⁾. Nota II di G. GALLO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Il Moissan, nella sua raccolta di lavori sul fluoro ⁽³⁾, rileva come molto resti ancora da studiare a proposito di questo elemento, e molte lacune debbano venire ancora colmate; in particolar modo lo studio dei composti ossigenati del fluoro, dei fluoruri di zolfo, di iodio, di bromo, e quelli di numerosi fluoruri ed ossifluoruri metallici, meriterebbero delle ricerche ulteriori.

Questo campo abbastanza vasto di ricerche che rimane ancora da coltivare, mi ha consigliato di intraprendere lo studio dell'argomento, in vista della possibile preparazione di alcuni di questi composti.

Come è noto, le proprietà fisiche e chimiche degli alogeni, pure essendo in stretta relazione fra loro, sono però una funzione del peso atomico degli alogeni stessi e fra queste l'affinità per l'idrogeno va aumentando dall'iodio al fluoro, e la combinazione avviene con sviluppo di calore, mentre l'affinità

⁽¹⁾ A. Lacroix, *Note sur une association de sillimanite et d'andalousite*, Bull. Soc. Minéral., t. XI, pag. 150, 1888.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della R. Scuola degli Ingegneri della Università di Roma.

⁽³⁾ *Le fluore et ses composés*. Paris, 1900, ed. Steinheil, pag. 120.

con l'ossigeno va diminuendo nello stesso senso dall'iodio al fluoro; poichè, mentre solo l'I può combinarsi direttamente con l'O, questa affinità va affievolendosi per il bromo e il cloro, mentre non si conoscono affatto i composti ossigenati del fluoro. E contrariamente a quanto avviene per i composti idrogenati, le combinazioni con l'ossigeno sono endotermiche, sono poco stabili, e la loro decomposizione avviene con esplosione.

Già il Moissan, allo scopo di studiare il comportamento del fluoro coll'ossigeno, aveva eseguito delle numerose esperienze. Egli fece arrivare del fluoro secco sopra dell'ossigeno liquido contenuto in un tubo di vetro, ed osservò che il fluoro liquefacendosi, si mescolava uniformemente coll'ossigeno, comunicando a questo una colorazione giallastra. Se si lascia innalzare lentamente la temperatura del miscuglio liquido dei due gas, l'ossigeno si evapora per primo, ed il liquido si concentra sempre più in fluoro, fino a che anche quest'ultimo entra in ebollizione. Per cui, alla temperatura dell'ossigeno liquido (-210) il fluoro non reagisce con questo elemento, ed in generale l'energia chimica del fluoro liquido è tanto piccola, da non riuscire a spostare l'iodio dagli ioduri.

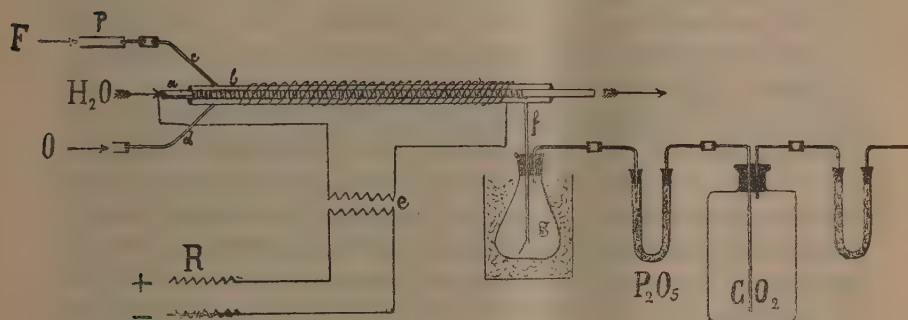
Alla temperatura ordinaria il fluoro non esercita alcuna azione sull'ossigeno. Analogamente se si fanno reagire il fluoro e l'ossigeno entro un tubo di platino alla temperatura di 500° , non si osserva alcun fenomeno, ed il miscuglio gassoso non presenta alcuna proprietà nuova. Invece sembra che si possa produrre una reazione, quando si faccia agire il fluoro sull'ozono molto concentrato.

A questo proposito il Moissan eseguì la seguente esperienza ⁽¹⁾. Come è noto, il fluoro decompone l'acqua con estrema violenza, formando acido fluoridrico ed ozono. Se si fanno arrivare nell'interno di un tubo di platino orizzontale, chiuso alle due estremità con due dischi di fluorina trasparente, e pieno di fluoro, alcune gocce di acqua, si produce tosto una decomposizione, e si osserva una nube densa, di colore oscuro, formarsi al di sopra della goccia d'acqua. Questa nebbia diminuisce a poco a poco d'intensità, per dar luogo ad una tinta bleu, indicante l'esistenza di ozono abbastanza concentrato per presentare il colore bleu indicato da Hautefeuille e Chappuis. Se al momento in cui si son prodotti questi fumi oscuri, si scaccia il miscuglio gassoso con una corrente di azoto, si sente un odore piccante, diverso da quello del fluoro; odore che va rapidamente modificandosi per dare poi l'odore caratteristico dell'ozono. Il Moissan è d'opinione che la nube oscura sia dovuta alla formazione di un composto ossigenato instabile del fluoro, e facilmente decomponibile o per una elevazione di temperatura, o in causa di tracce di umidità.

⁽¹⁾ Loc. cit., pag. 122.

Infine il Moissan ⁽¹⁾ ha studiato l'azione del fluoro sopra gli ossidi metallici. La potassa fusa, messa in presenza di una atmosfera di fluoro, non tarda a sviluppare ozono, ed a ricoprirsi di uno strato di fluoruro alcalino, che diminuisce o limita la reazione. La soluzione acquosa di potassa, nella quale si faccia passare del fluoro gassoso, non ha dato una reazione tale da lasciar intravedere l'esistenza di un composto ossigenato del fluoro, analogo all'acido ipocloroso, ma sembra piuttosto che si formi un composto di ossido di potassio e di acqua ossigenata, insieme a del fluoruro potassico. Se la soluzione potassica contiene del cloruro potassico, si forma rapidamente dell'acido ipocloroso.

Da tutte queste esperienze risulta come l'affinità del fluoro per l'ossigeno sia in realtà molto debole, però i fatti osservati non escludono la possibilità



che in condizioni speciali di trattamento, si possa determinare la combinazione del fluoro coll'ossigeno, data l'analogia del fluoro cogli altri alogeni. Ed è in vista di questa probabilità che io mi sono proposto di tentare l'azione dell'effluvio elettrico, sopra un miscuglio di ossigeno e fluoro.

A tale scopo ho costruito l'apparecchio illustrato nella figura. Esso consta essenzialmente di un tubo generatore di ozono. Due tubi concentrici di vetro, *a*, *b*, vengono inseriti l'uno entro l'altro, e di essi l'esterno *b*, più corto, viene saldato, ai suoi estremi, sull'interno *a*, più lungo, in modo da lasciare una interapedine fra i due tubi. Il tubo *a* contiene nel suo interno una armatura metallica, costituita da una spirale di filo di alluminio, e serve inoltre a dar passaggio ad una corrente d'acqua, allo scopo di evitare un riscaldamento eccessivo. Nell'interapedine si possono far arrivare per mezzo dei due tubi *c* e *d*, una corrente di fluoro gassoso da una parte, e di ossigeno perfettamente secco e puro dall'altra. (Ricordo a questo proposito, che il fluoro perfettamente secco, ed esente da acido fluoridrico, non intacca il vetro pulito ed asciutto). All'esterno del tubo *b*, abbiamo un'altra spirale in alluminio,

(1) Moissan, loc. cit., pag. 228.

che funziona da seconda armatura. Fra le due armature metalliche, si può far avvenire la scarica oscura di una corrente ad alta tensione, proveniente dal secondario di un grosso rocchetto di Ruhmkorff (*e*). All'estremità del tubo ozonogeno, si trova un altro tubo a sviluppo, *f*, che termina entro un matraccio *g*, paraffinato internamente ed immerso in un miscuglio frigorifero. Segue a questo un tubo ad U pieno di anidride fosforica, quindi una bottiglia piena di anidride carbonica perfettamente secca, allo scopo di raccogliere un eventuale prodotto gassoso, ed infine un altro tubo ad anidride fosforica, stabilisce la comunicazione coll'esterno. Tutte le giunture delle varie parti dell'apparecchio sono fatte con tubetti di vetro che comprendono le due estremità da riunire, e sigillati con mastice *chatterton* (un mastice costituito di un miscuglio di guttaperga, resina e catrame) che ha la proprietà di non venire alterato dall'ozono.

La prima esperienza venne fatta il 28 dicembre 1909. Il fluoro che si sviluppava regolarmente dall'apparecchio da me precedentemente descritto⁽¹⁾, attraversava dapprima un tubo di rame P, contenente del fluoruro di sodio secco, allo scopo di trattenere le ultime tracce di acido fluoridrico, e quindi cominciò ad arrivare nel tubo ozonogeno, insieme all'ossigeno che entrava per *d*, mentre si faceva contemporaneamente funzionare il rocchetto *e*. Tutto procedette bene per circa dieci minuti, ed io attendevo ansiosamente l'apparire di qualche fenomeno: ma dopo pochi minuti dacchè l'esperienza era stata iniziata, osservai attraverso il tubo una viva luminosità, seguita tosto da una esplosione che mi fece saltare in aria il tappo dell'apparecchio di produzione del fluoro da una parte, e mandò in frantumi il matraccio paraffinato *g* dall'altra, ferendomi, non gravemente, al viso ed alle mani.

Osservando con calma il risultato dell'esperienza, ho potuto rilevare, come queste due parti erano appunto quelle che in tutto il sistema offrivano minore resistenza, e perciò cedettero per prime alla pressione determinata dallo scoppio. Questo è quanto ho potuto vedere finora.

A che cosa può essere dovuta questa esplosione? In primo luogo posso escludere in modo assoluto che l'idrogeno che si sviluppa al polo negativo del mio apparecchio, possa essere penetrato nello spazio anodico, e da questo nel tubo; basta infatti osservare la costruzione dell'apparecchio di produzione del fluoro, per escludere senz'altro questa probabilità; poichè un piccolo aumento di pressione potrebbe determinarsi nello spazio anodico, ma mai nello spazio catodico, dal quale io avevo durante l'esperienza confermato il regolare svolgimento di idrogeno.

Mi pare che l'ipotesi più verosimile che si possa fare, sia quella della formazione di un composto ossigenato del fluoro, molto instabile. Ne risulterebbe perciò, che la reazione tra fluoro ed ossigeno sarebbe endotermica,

(1) G. Gallo, Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XIX, ser. 5^a, fasc. 4.

come le combinazioni analoghe degli altri alogeni, ma non appena il composto si forma nelle condizioni della mia esperienza, o almeno appena raggiunto un certo limite, può, o per un innalzamento di temperatura, o per altra causa eventuale, decomorsi con esplosione, come ancora i composti ossigenati degli altri alogeni, ed in particolar modo il biossido di cloro, Cl_2O_4 .

Ad ogni modo, io mi propongo di continuare i miei studi sull'argomento, nella speranza di poter fissare in qualche modo questo probabile composto, sul quale non mi è dato per ora di dire più oltre.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sul luogo di utilizzazione dell'azoto dei nitrati nel corpo delle piante.* Nota di C. ACQUA, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Patologia vegetale. — *Gommosi da ferita, trips ed acariosi delle viti americane in Sicilia.* Nota di E. PANTANELLI, presentata dal Socio G. CUBONI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Sulla ricostituzione del nucleo* ⁽¹⁾. Nota preliminare di GUSTAVO BRUNELLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Lo studio della divisione indiretta delle cellule spermatogoniali ed anche delle cellule somatiche in *Tryxalis*, mi ha portato ad alcuni risultati che io credo di un certo interesse relativamente al problema del modo come si effettua la ricostituzione del nucleo.

Le principali conclusioni, tratte dai fatti da me osservati nelle suddette divisioni, sono le seguenti:

1. I cromosomi anafasici si mostrano scissi longitudinalmente; questo non è un carattere eccezionale, ma normale delle divisioni somatiche.

2. La duplicità dei cromosomi telofasici non è solo apparente e dovuta all'alveolizzazione, ma reale e conseguente alla scissione anafasica.

3. Nel nucleo in riposo, non solo persistono i cromosomi, ma persistono come esili filamenti doppi, molto lunghi e ritorti.

4. La scissione longitudinale profasica è solo apparente, vale a dire non è che il riapparire della precedente scissione anafasica.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Ammettendo la persistenza degli individui cromosomici, non solo respingiamo con altri autori la vecchia idea di uno spirema continuo e di una susseguente divisione trasversale, ma respingiamo anche l'idea di una scissione longitudinale dei segmenti spirematici, come un momento caratteristico della profase.

Nell'ammettere poi che i cromosomi persistano nel nucleo in riposo scissi per il lungo, la nostra opinione si discosta da quella dei precedenti autori che pure si sono pronunciati in favore della individualità dei cromosomi, e precisamente:

1. Dall'idea di Van Beneden (elaborata da Grégoire), che il reticolo nucleare si costituisca mediante una semplice alveolizzazione dei cromosomi telofasici.

2. Dall'idea di Boveri, secondo il quale il reticolo nucleare si origina dalle anastomosi in cui gli individui cromosomici si risolverebbero nella loro totalità.

3. Dall'idea della Bonnevie, secondo la quale nella ricostituzione del nucleo corrisponde a ciascun cromosoma un solo filo cromatinico a decorso spirale.

Mentre le nostre idee sul nucleo in riposo possono sembrare in contrasto con alcuni reperti, si accordano con molti altri, per citarne uno solo interessante: la precoce scissione profasica rilevata da parte di diversi autori. Ma deve soprattutto esser considerato ciò: che rispondono al nostro modo di vedere anche le condizioni del nucleo nei primi momenti dell'accrescimento nella linea germinale, condizioni che in precedenza abbiamo sostenuto risiedere in una mancanza del leptonema e in una duplicità iniziale dei segmenti spirematici (¹). Cadrebbero con ciò molte idee preconette sovra alcune strutture del periodo di accrescimento, ritenute peculiari delle cellule germinali.

La nostra ipotesi generale che sottoponiamo fiduciosamente ad ulteriori analisi, è che la ricostituzione del nucleo avviene in modo tale che il carattere della profase (sia maturativa che somatica) non solo non risiede in una divisione trasversale dello spirema, ma nemmeno in una scissione longitudinale dei segmenti spirematici. Ciò che caratterizza la profase è solo il condensamento e la detorsione degli individui cromosomici precedentemente scissi, allungati e ritorti.

(¹) G. Brunelli, *La spermatogenesi del « Gryllus desertus »* Pall (*Divisioni spermatogoniali e maturative*), Mem. Acc. Lincei, serie 5^a, vol. VII, 1909.

Patologia — *Il primo caso di bottone d'Oriente in Italia.*
Nota del prof. UMBERTO GABBI e del dott. FRANCESCO LACAVA,
presentata dal Socio B. GRASSI.

In quasi tutti i paesi dove si riscontrarono malati di kala-azar, si osservarono anche casi del cosiddetto bottone d'Oriente. Abbiamo scritto in quasi tutti, non in tutti, perchè ci consta che vi sono regioni nelle quali l'una malattia è presente, mentre l'altra no e viceversa (Manson).

I paesi nei quali entrambe le forme cliniche si presentano, sebbene con frequenza assai diversa sarebbero l'Egitto, la Tunisia, l'Algeria e la Grecia.

Da quando da uno di noi (Gabbi) vennero osservate in Sicilia e in Calabria alcune affezioni morbose — la febbre di Malta, il kala-azar, la *dengue* ed il bubbone climatico — che si riscontravano nel vicino Nord Africano, il dubbio che altre malattie di paesi caldi fossero pure presenti, era alimentato dal fatto che si osservavano dei casi clinici, la cui sindrome co-
piava in tutto od in gran parte quella di altre malattie dei paesi tropicali a noi più vicini.

La presunzione che accanto al kala-azar vi fosse il bottone d'Oriente era assai forte e per queste due principalissime ragioni: la prima, perchè i due microrganismi generatori della malattia sono morfologicamente assai affini; la seconda, perchè rammentiamo casi di circoscritta affezione cutanea che ricordava coi suoi caratteri quella del cosiddetto bottone d'Oriente, ed alla quale abbiamo dato l'appellativo di tubercolo cutaneo che altri aveva proposto.

Uno di noi (dott. Lacava) aveva vivo nella memoria il ricordo di qualche isolato esempio di simile affezione cutanea ed era alle vedette di qualche nuovo caso che potesse capitare all'osservazione. L'attesa non fu lunga. Da qualche tempo gli si presentò un giovane di 19 anni ⁽¹⁾ muratore, di sana e robusta costituzione fisica, da circa quattro mesi presentante all'altezza dell'articolazione del pugno destro, nella pelle che ricopre l'estremità del radio, una intumescenza a forma di bottone di circa 12-14 mm. di diametro, rotonda, interessante la sola cute e spostabile con questa. La cute poi presenta nel centro una piccola escavazione crateriforme, a margini taglienti, a fondo grigio-sporco, non sanguinante e contornata da croste, le quali coprono talvolta la superficie ulcerosa. Se queste si staccano esce *pus* misto a sangue, eppoi sangue scuro. La intumescenza è dura e quasi del tutto

(¹) Del paese di Bovalino (Calabria) dove si osservano in adulti tre casi di kala-azar e due in adolescenti.

indolente. I gangli epitrocleari corrispondenti all'arto presentante il bottone sono duri, e d'una durezza lignea.

Questi caratteri indicavano nettamente il bottone d'Aleppo e noi abbiamo avuto la quasi certezza che si trattasse di questa malattia. Delle due forme cliniche colle quali avrebbe potuto essere confusa e cioè il tubercolo cutaneo e la gomma sifilitica non si doveva tenere gran conto sia per la nessuna eredità tubercolare del soggetto, rispetto alla prima; sia per la non avvenuta infezione sifilitica rispetto alla seconda.

A chiarire la situazione abbiamo fatto strisci col liquido raccolto dalla superficie ulcerosa, col sangue fatto sgorgare pungendo con ago sterilizzato la superficie stessa, e col sangue preso con siringa di Pravaz alla periferia del bottone. Fissati prima con alcool metilico e quindi colorati col Giemsa, abbiamo veduto numerosissime forme di *Leishmania*, che diciamo *tropica* perchè tale fu il nome dato da coloro che hanno studiato la malattia nei paesi tropicali. Essa appare forse più grande della *L. Donovan* (*kala-azar*) ed offre particolarità morfologiche sulle quali ci fermeremo lungamente nel lavoro che andiamo preparando.

Zoologia. — *Ancora delle ricerche sul numero degli Anofeli infetti nell'agro romano durante il periodo della cura e della profilassi contro la malaria, nell'anno 1909.* Nota del dott. GIOVANNI NOÉ, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Dell'azione locale della temperatura sui vasi sanguigni* ⁽¹⁾. Nota del dott. ANTONIO BERTI, presentata dal Socio ARISTIDE STEFANI.

Riferisco sopra una serie di esperienze, in base alle quali viene dimostrato uno speciale comportamento dei vasi sanguigni verso la temperatura, che spiega parecchi dei risultati apparentemente contraddittorî, ottenuti dagli sperimentatori che mi hanno preceduto nello studio di questo argomento.

Riprendo lo studio, intorno all'azione locale della temperatura sui vasi, al punto nel quale era stato lasciato dal Lui ⁽²⁾, che eseguì le sue ricerche, nel 1894, in questo Istituto.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Padova, diretto dal prof. Aristide Stefani.

⁽²⁾ *Dell'az. locale della temper. sui vasi sang.*, Rivista Veneta di Scienze mediche, 1894, n. 1; *Action locale de la température sur les vaisseaux sanguines*, Arch. it. de Biol., XXI, 3°, 1894.

Le esperienze del Lui si fondano sul principio, che quando la pressione sotto la quale viene fatta una circolazione artificiale con un determinato liquido, attraverso determinati vasi sanguigni, sia costante, l'efflusso deve essere proporzionale al lume dei vasi; cosicchè dalle variazioni dell'efflusso, nell'unità di tempo, si può dedurre lo stato dei vasi stessi.

Questo metodo delle circolazioni artificiali, applicato dallo Stefani, fino dal 1886, allo studio delle azioni locali sui vasi sanguigni, è preferibile a tutti gli altri, perchè — facendosi l'esperienza parecchi minuti dopo l'uccisione dell'animale — viene escluso l'intervento delle azioni dipendenti dalla pressione generale del sangue, e delle azioni dipendenti dai centri cerebro-spinali e probabilmente anche dai gangli periferici; e i risultati che si ottengono possono quindi essere attribuiti esclusivamente ad un'azione diretta locale sui vasi e, con probabilità, ad un'azione esclusiva sulla fibra muscolare.

Il Lui — avendo fatta circolare per gli arti isolati di cani, alternativamente, soluzione fisiologica a 45° circa ed a 35° circa — ha concluso che « la modificazione locale prevalente e duratura dei vasi, prodotta dal caldo, è la costrizione, e quella prodotta dal freddo la dilatazione ». Questa conclusione, nei riguardi dell'azione locale, se collima con le conclusioni di alcuni autori, è in aperto contrasto con le conclusioni di altri. In parte, però, così il disaccordo come l'accordo sono soltanto apparenti, perchè gli appellativi di freddo e di caldo sono stati attribuiti dagli autori diversi a temperature diverse: al punto che talvolta si vede chiamata fredda da uno la temperatura che è considerata come calda da un altro.

Dopo avere ripetuto le esperienze del Lui e di essermi potuto accertare che realmente nel passaggio da 35° a 45° si ha una costrizione e nel passaggio da 45° a 35° una dilatazione, mi sono proposto di risolvere collo stesso metodo — cioè praticando circolazioni artificiali in territorî vascolari diversi di cani e di gatti da poco uccisi — i seguenti quesiti:

1°) Se lo sbalzo di un egual numero di gradi (10°), ma fra temperature diverse da quelle esaminate dal Lui, determini gli stessi risultati.

2°) Se la costrizione che Lui chiama « da caldo » e la dilatazione che Lui chiama « da freddo » siano effetto del rapido passaggio dall'una all'altra temperatura, o non siano invece l'effetto diretto della temperatura medesima, in modo che il lume dei vasi abbia ad essere in rapporto costante con questa.

3°) Se i vasi muscolo-cutanei reagiscano alla temperatura nel medesimo modo dei vasi viscerali.

A tale scopo ho esaminato anzitutto l'effetto, sui vasi degli arti, dello sbalzo di 10°, in più ed in meno, fra temperature notevolmente diverse da quelle esaminate dal Lui.

Quando lo sbalzo avveniva fra 10° e 20° , fra 15° e 25° , fra 20° e 30° , fra 25° e 35° , fra 30° e 40° , ottenevo una espansione vasale, e quando avveniva in senso opposto, cioè fra 20° e 10° , fra 25° e 15° ecc., una costrizione. Così, da questa prima serie di esperienze rimane dimostrato, che se la temperatura di 45° produce costrizione, produce costrizione anche la temperatura di 10° .

Partendo da questi dati, onde risolvere la seconda questione, ho creduto opportuno di ricercare come si comportassero i vasi sottoposti a circolazioni con soluzione fisiologica di temperatura regolarmente crescente o decrescente; ed ho costruito a tal fine un apparecchio, mediante il quale potevo appunto ottenere che la temperatura del liquido circolante regolarmente aumentasse o decrescesse.

Valendomi di questo apparecchio, ho determinato l'efflusso nell'unità di tempo, e quindi lo stato dei vasi, alle temperature del liquido circolante comprese fra 0° e 45° , ottenendo i risultati che seguono:

Irrorando i vasi con soluzione fisiologica a temperatura progressivamente crescente da 0° a 40° , i vasi progressivamente, ora più ed ora meno, si dilatano: e, più precisamente, si dilatano poco e con lentezza da 0° a 15° circa, notevolmente e con rapidità da 15° a 30° circa, e di nuovo con minore intensità e rapidità da 30° in su. Fenomeni inversi si ottengono irrorando i vasi con liquido di temperatura progressivamente decrescente da 40° a 0° .

Da 40° a 42° - 44° i vasi continuano per lo più a dilatarsi; ma appena si sorpassano i 42° - 44° , si costringono rapidamente e fortemente.

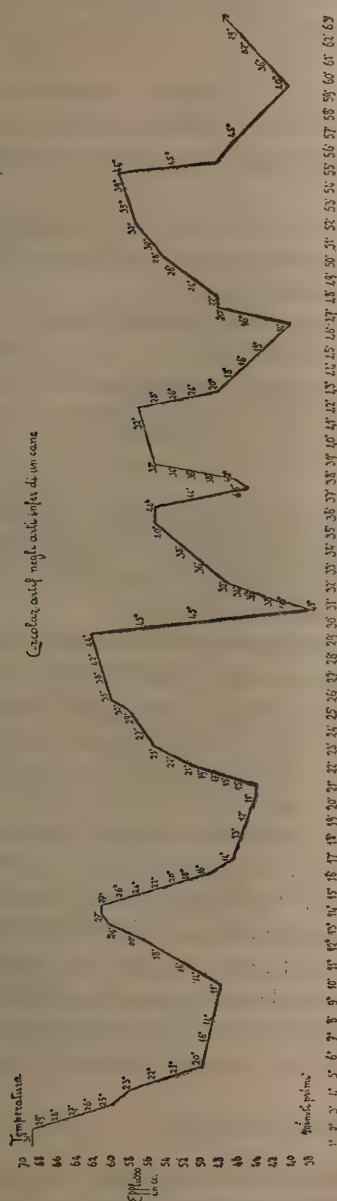
Questo speciale comportamento è dimostrato dall'annessa grafica, costruita mediante le cifre rappresentanti l'efflusso nell'unità di tempo, a temperature diverse (alternativamente crescenti e decrescenti), cifre ottenute in una esperienza di circolazione artificiale nel treno posteriore di un cane.

E così, da questa seconda serie di esperienze rimane dimostrato, che, anche senza rapido sbalzo, a determinate temperature corrispondono determinate capacità del lume dei vasi.

Rilevato il comportamento dei vasi muscolo-cutanei, sono passato ad esaminare, se si comportino in eguale maniera i vasi viscerali, e precisamente i vasi dei polmoni, del fegato, del rene, della milza, praticando la circolazione artificiale attraverso detti organi; ed ho ottenuto i risultati seguenti:

Il comportamento dei vasi viscerali di fronte alle varie temperature è simile a quello dei vasi muscolo-cutanei, ma i vasi viscerali reagiscono più energicamente dei vasi muscolo-cutanei di fronte alle varie temperature e cominciano a restringersi a temperature meno elevate, cosicchè in generale si osserva, che quella temperatura di 42 - 43° , che per lo più non è ancora capace di determinare costrizione nei vasi muscolo-cutanei, è già capace di determinarla nei vasi viscerali, ed in particolar modo nei vasi renali. La maggiore reattività si manifesta con variazioni d'efflusso più pronte e più rapide.

Dopo di aver praticata un po' a lungo una circolazione artificiale con soluzione fisiologica a temperatura superiore ai 42-43°, determinante intensa



Grafica costruita mediante le cifre rappresentanti l'efflusso nell'unità di tempo, a temperature diverse (alternativamente crescenti e decrescenti), cifre ottenute in una esperienza di circolazione artificiale nel treno posteriore di un cane.

I numeri disposti verticalmente, a sinistra, indicano l'efflusso in un periodo di 20"; i numeri disposti trasversalmente, in basso, indicano i minuti primi decorsi dal principio dell'esperienza; i numeri lungo la curva indicano la temperatura del liquido circolante nei vasi.

vasocostrizione, riabbassando la temperatura del liquido circolante, i vasi di frequente non riprendono più il loro lume normale. Questo fatto, che con

probabilità è dovuto alla insorgenza della rigidità muscolare da caldo, ed al quale non è forse estranea anche la insorgenza degli edemi che non di rado si stabiliscono a simili temperature, si verifica più facilmente nei vasi viscerali in confronto ai muscolo-cutanei.

In base alle suesposte esperienze, sono condotto a concludere:

1°) Che, negli animali omotermi, dalla temperatura del sangue discendendo a temperature più basse si ha una progressiva diminuzione del lume dei vasi.

2°) Che dalla temperatura del sangue salendo a temperature superiori si ha sul principio, per qualche grado, una lieve dilatazione vasale, e poi una rapida e notevolissima vasocostrizione.

3°) Che ad una temperatura di poco superiore a quella del sangue i vasi si trovano nello stato di massima espansione, così che qualunque temperatura superiore od inferiore a quella è accompagnata da vasocostrizione.

4°) Che ad ogni determinata temperatura corrisponde da parte dei vasi un determinato lume.

All'azione locale della temperatura del sangue sui vasi, dimostrata da queste e da precedenti esperienze, penso che debbano essere attribuiti molti di quei fatti che comunemente si attribuiscono invece ad azioni riflesse o ad azione diretta della temperatura sui centri vasomotori.

A conferma di questa opinione osservo che lo Stefani (¹), dai mutamenti della temperatura del liquido circolante per i vasi degli arti di animali vivi, non ha potuto ottenere azioni vasali riflesse, finchè queste variazioni di temperatura non oltrepassavano quei limiti, di là dai quali esse producono dolore, e che riguardo all'azione diretta della temperatura sul centro bulbare vasocostrittore, egli (²) non ha ottenuto che risultati incerti.

I fatti surriferiti si possono interpretare, secondo i concetti già sviluppati dallo Stefani (³), ammettendo: che i vasi sanguigni degli animali omotermi, alle basse temperature (0-15°) si trovino in uno stato di metabolismo torpido, latente, e che, elevando progressivamente la temperatura, il metabolismo si intensifichi progressivamente, con prevalenza dei processi anabolici, donde la progressiva espansione vasale; che questo progressivo aumento dell'attività metabolica, con prevalenza della anabolica, continui non solo fino alla temperatura del corpo, ma anche per qualche grado al di sopra; e che un

(¹) *Dell'az. vasomot. refl. d. temp.*, Atti del R. Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. VI, ser. VII, 1894-95.

(²) *Az. d. temp. sui centri bulb. del cuore e dei vasi*, Atti del R. Istit. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. VI, ser. VII, 1894-95.

(³) *Della irritabilità*, Atti del R. Istit. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. LVIII, p. II, 1898-99; *Az. locale della stricnina sui vasi sang.*, Id., t. LXI, p. II, 1901-02.

aumento ulteriore della temperatura provochi invece una prevalenza dei processi catabolici, finchè presso ai 50° si stabilisce la morte dei vasi.

Nel chiudere questa Nota desidero esprimere viva riconoscenza al mio maestro, prof. Aristide Stefani, per il benevolo interessamento a queste esperienze per i consigli, dei quali ha voluto essermi largo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio GRASSI, relatore, a nome anche del Socio GOLGI, legge una relazione colla quale si propone la pubblicazione della Memoria: *Sui mitocondri e apparato reticolare interno delle cellule spermatiche e relative modificazioni durante la divisione cellulare*, del dott. A. PERRONCITO.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: NACCARI, BERLESE, GIGLIOLI, ISSEL, SILVESTRI, HOWARD DARWIN, LACROIX, PENCK; e quelle dei signori: prof. CALDERINI, ing. BORGNINI, DAMIANOVICH e HAYFORD. Fa inoltre particolare menzione di un volume contenente la relazione sulle Onoranze tributate al prof. LUIGI CREMONA, nel giugno del 1909.

Il Presidente BLASERNA, offre a nome dell'autore prof. E. HERRERO DUCLOUX dell'Università di La Plata, una raccolta di Memorie, dandone notizia.

Il Socio CAPELLINI fa omaggio di due sue Memorie a stampa: *Le Cicadee fossili del Museo di Bologna*; *Avanzi di una Balenottera nelle marne mioceniche dei dintorni di Ancona*, e ne discorre.

Il Socio CIAMICIAN presenta il 3° volume degli Atti della Società italiana per il progresso delle scienze, col resoconto dei lavori del Congresso che si tenne in Padova nell'ottobre dell'anno scorso, e dà notizia di quanto nel volume è contenuto, e particolarmente dei discorsi inaugurali e delle principali relazioni.

Il Segretario MILLOSEVICH fa vedere ai Colleghi tre diapositive ottenute all'Osservatorio Astro-Fisico di Catania riguardanti la cometa 1910 a e espressamente inviate all'Accademia dal Direttore di quell'Osservatorio il Corrispondente prof. A. Riccò.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA comunica una cortese lettera colla quale S. A. S. il PRINCIPE DI MONACO invita l'Accademia a farsi rappresentare da un suo delegato alla inaugurazione del Museo Oceanografico in Monaco. La rappresentanza accademica viene affidata al Socio senatore B. GRASSI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 marzo 1910.

- BORGHINO C. — Cenni storico-critici sulle origini dell'industria dello zucchero in Italia. Bologna, 1910. 4°.
- DAMIANOVICH H. — Estudio fisico-químico y bio-químico de las materias colorantes orgánicas artificiales. Buenos Aires, 1909. 8°.
- DARWIN G. H. — Figures of rotating liquid and geophysical Investigations. (Scientific Papers, vol. III). Cambridge, 1910. 4°.
- GUERRINI G. — Index parasitorum qui exstant in Instituto pathologico regiae Scholae sup. Medicinae veterinariae Mediolani. Bologna, 1909. 8°.
- GUERRINI G. — I neoplasmi dell'occhio negli animali. Nota statistica e bibliografica. (Estr. dalla rivista « Pathologica » an. I). Genova, 1909. 8°.
- GUERRINI G. — Note di casistica teratologica. (Syncephalus thoracopagus monoprosopus tribrachius (Taruffi) in un gatto). (Estr. dal giornale « La Clinica Veterinaria » anno 1909). Milano, 1909. 8°.
- GUERRINI G. — Primäres Sarkom der Konjunktiva beim Rinde. (Sonderab. aus « Der Tierarzt » 1909). Leipzig, 1909. 8°.
- GUERRINI G. — Su di un caso di « ciclops rhynchaenus » (Gurlt) osservato in un cane. (Estr. dal giornale « La Clinica Veterinaria » anno 1909). Milano, 1909. 8°.
- GUERRINI G. — Ueber einen Fall von Ren polycysticus beim Kalbe: Beitrag zur Kenntnis der kongenitalen Missbildungen der Nieren. (Sonderabd. aus « Oesterr. Monatsschr. f. Tierheilkunde » XXXIV, n. 2). S. I. e d. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E. — Aguas minerales alcalinas de la República Argentina. (Estr. de la « Revista del Museo de la Plata » Buenos Aires, 1907. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E. — Datos calorimétricos de Mantecas Argentinas. La Plata, 1909. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E. — El Hierro meteorico de la puerta de Arauco. (Estr. de la « Revista del Museo de la Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E., OUTES F. — Estudio de la supuestas escorias y tierras cocidas de la serie pampeana de la República Argentina. (Estr. de la « Revista del Museo de La Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908. 8°.
- HERRERO DUCLOUX L. — Las aguas minerales de los valles de Hualfin y otros de la provincia de Catamarca. (Estr. de la « Revista de La Plata » tom. XVI). Buenos Aires, 1909.
- HERRERO DUCLOUX E. — Nota sobre algunos aceites de Oliva argentinos. La Plata, 1909. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E. — Nota sobre el carbón de Salagasta. Museo de La Plata, 1907. 8°.
- HERRERO DUCLOUX E. — Nota sobre la Ceniza del volcan Rininahue. (Estr. de la « Revista del Museo de La Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908.
- ISSEL A. — Alcuni risultati degli studi promossi dal Principe di Monaco sulle caverne ossifere dei Balzi Rossi. Roma, 1908. 8°.
- ISSEL A. — Appunti paleontologici. IV. Descrizione di due denti di Elefante raccolti nella Liguria occidentale. (Estr. dagli « Annali del Mus. Civ. di St. Nat. di Genova » vol. XIV, 1879). Genova, 1879. 8°.
- ISSEL A. — Caverne ossifere dei Balzi Rossi. (Estr. dal « Bullettino di paleontologia italiana » 1908). Parma, 1908. 8°.
- ISSEL A. — Cavità rupestri simili alle cal-

- daie dei giganti. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze natur. e geograf. » vol. XVIII). Genova, 1907. 8°.
- ISSEL A. — Cenni storici sul Gabinetto di Geologia della R. Università di Genova. (Estr. dagli « Atti della Società Ligustica di scienze natur. e geograf. » 1900). Genova, 1900. 8°.
- ISSEL A. — Considerazioni supplementari intorno al terremoto umbro-marchigiano del 18 dec. 1897. (Estr. dal « Bollettino della Soc. sismologica ital. » vol. V). Modena, 1899. 8°.
- ISSEL A. — Dei fossili recentemente raccolti nella caverna delle Fate (Finalge). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Stor. Nat. di Genova » serie 2^a vol. IX, 1889). S. l. e d. 8°.
- ISSEL A. — Della convenienza di promuovere l'esplorazione delle caverne d'Italia sotto l'aspetto della topografia, della idrografia sotterranea e della zoologia. (Estr. dal « Questionario del I Congresso Geograf. Ital. »). s. l. e d. 8°.
- ISSEL A. — Excursion géologique dans les environs de Gènes. Gènes, 1905. 8°.
- ISSEL A. — Giovanni Marinelli geografo. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze natur. » vol. XI). s. l. e d. 8°.
- ISSEL A. — Il calcifiro fossilifero di Rovigno in Val di Trebbia. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia naturale di Genova » vol. IX). Genova, 1890. 8°.
- ISSEL A. — Il concetto della direzione nei corsi di acqua. (Estr. dalla « Rivista geografica ital. » an. XIV). Firenze, 1907. 8°.
- ISSEL A. — L'apprezzamento dei colori nelle scienze naturali. (Estr. dagli « Atti del Congresso dei Naturalisti ital. »). Milano, 1907. 8°.
- ISSEL A. — La rotazione terrestre è per l'uomo fattore precipuo della distribuzione geografica. (Estr. dal « Bollettino della Società geografica ital. » 1910). Roma, 1910. 8°.
- ISSEL A. — Le tremblement de terre du 23 février 1877, observé dans les tunnels de la Ligurie. (Estr. du « Bulletin de la Société Belge de géologie, de paléont. et d'hydrologie » t. I, 1887). Bruxelles, 1887. 8°.
- ISSEL A. — Morfologia e genesi del mar Rosso. Saggio di paleogeografia. (Estr. dagli « Atti del III Congresso Geografico ital. »). Firenze, 1899. 8°.
- ISSEL A. — Note spiccate. I. Valle del Penna. (Estr. dagli « Atti della Soc. ligustica di scienze nat. e geogr. »). Genova, 1900. 8°.
- ISSEL A. — Note spiccate. II. Valle di Calizzano con appendice di G. Rovereto. (Estr. dagli « Atti della Soc. ligustica di scienze nat. e geogr. » anno XV). Genova, 1904. 8°.
- ISSEL A. — Osservazioni da eseguirsi per presagire i parossismi vulcanici. (Estr. dalla rivista mensile di Sc. Nat. « Natura » vol. I). Pavia, 1909. 8°.
- ISSEL A. — Osservazioni intorno alla frana del Corso Firenze in Genova. (Estr. dal « Giornale di geologia pratica » 1904). Perugia, 1904. 8°.
- ISSEL A. — Recenti studi sulle rocce giadaïtiche e nefritiche italiane. (Estr. dal « Bollettino di paleontologia italiana » vol. XXXIV). Parma, 1908. 8°.
- ISSEL A. — Relitti. (Estr. dalla « Rivista ligure di scienze nat. e geogr. »). Genova, 1908. 8°.
- ISSEL A. — Remarques sur les tremblements de terre subis par l'île de Zante pendant l'année 1893. Paris, 1894. 4°.
- ISSEL A. — Saggio di un nuovo ordinamento sistematico degli alvei e delle rive marine. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze nat. »). Genova, 1905. 8°.
- ISSEL A. — Spallanzani nel Finale ligure. Genova, 1899. 8°.
- ISSEL A. — Terminologia geografica relativa alla configurazione orizzontale della terra emersa, al mare e alle profondità marine. Genova, 1904. 8°.
- ISSEL A. — Torriglia e il suo territorio. (Estr. dal « Bollettino della Soc. geologica ital. » vol. XXV). Roma, 1906. 8°.

- ISSEL A. — Un exemple de survivance préhistorique. (Extr. du « Compte rendu du XIII Congrès d'antropologie et d'archéologie préhistor. »). Monaco, 1907. 8°.
- KIEFFER I. I. — Cécidomyes parasites de Diaspis sur le Mûrier. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia gener. e agr. della R. Scuola Super. d'agricoltura di Portici » vol. IV, 1910). s. l. e d. 8°.
- LACROIX A. — Sur l'existence à la Côte d'Ivoire d'une série pétrographique comparable à celle de la charnockite. (Extr. des « Comptes-rendus des séances de l'Acad. des Sciences » t. 150). Paris, 1910. 4°.
- Onoranze al prof. Luigi Cremona. Roma, 1909. 8°.
- PENCK A., BRÜCKNER E. — Die Alpen in Eiszeitalter. B. I-III. Leipzig, 1909. 4°.
- PENCK A. — Die Entwicklung Europas seit der Tertiärzeit. (Sonderabd. aus den « Résultats scientifiques du Congrès internat. de Botanique »). Jena, 1906. 4°.
- PENCK A. — Die grossen Alpanseen. (Sonderabd. aus der « Geograph. Zeitschr. » B. XI, H. 7). Leipzig, 1905. 4°.
- PENCK A. — Die interglazialen Seen von Salzburg. (Sonderabd. aus der « Zeitschrift f. Gletscherkunde » B. IV). Berlin, 1910. 8°.
- PENCK A. — Die Morphologie der Wüsten. (Sonderabd. aus der « Geographischen Zeitschr. » B. 15, H. 10) Leipzig, 1909. 8°.
- PIOLTI G. — Sabbie della catena del Ruwenzori e della regione di Toro. (Estr. dal vol. II dell'opera « Il Ruwenzori », Relazioni scientifiche). s. l. e d. 8°.
- PIOTTI G. — Sull'Oncopina di Variney. (Valle d'Aosta). (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. XLIV, 1909). Torino, 1909. 8°.
- POLI SERGIACOMI E. — Il Sole. Roma, 1910. 8°.
- RUSO A. — Le modificazioni sperimentali dell'ovaia nei mammiferi, e le cause dalla differenziazione del sesso. (Estr. della rivista mensile di Sc. Nat. « Natura », vol. I). Pavia, 1909. 8°.
- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza dei miriapodi dell'Uganda. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova » ser. 3ª, vol. IV). Genova, 1910. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizioni preliminari di nuovi generi di diplopodi. (Sonderabd. aus dem « Zoologischen Anzeiger » XXXV, n. 12). Wien, 1910. 8°.
- VERSON E. — Se, allo stato inerte, gli stigmi del baco da seta debbano ritenersi aperti o chiusi. Nota. Venezia, 1910. 8°.
- VISMARA S. — Montecassino e il suo Osservatorio meteorico e geodinamico. (Estr. dalla « Riv. Storica Benedettina » anno V, 1910). Roma, 1910. 8°.

E. M.